5. Tutorium - Lösungen **07.11.2014**

- ANMERKUNG: Bitte diesen Lösungszettel nicht online stellen, und nicht von einer anderen Seite als dem TUWEL Kurs herunterladen.

5.1 Multiple Choice Fragen

a) $\vec{x}\cdot\mathrm{rot}\,(\vec{x}) \to x_i\varepsilon_{ijk}\partial_j x_k = x_i\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0$. (da antisymmetrisch $\times$ symmetrisch).
b) $\mathrm{rot}\,(\vec{p}\times\vec{x}) \to \varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\varepsilon_{klm}p_l x_m\right) = \underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}}_{\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}}\, p_l\, \underbrace{\partial_j x_m}_{\delta_{jm}} = \left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)p_l\delta_{jm}$

$= \delta_{il}\delta_{jm}p_l\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}p_l\delta_{jm} = \underbrace{\delta_{jj}}_{3}\, p_i - p_i = 2p_i \to 2\vec{p}$.

c) $\mathrm{rot}\left(\vec{E}\times\vec{x}\right) \to \varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\varepsilon_{klm}E_l x_m\right) = \underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}}_{\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}}\ \underbrace{\partial_j\left(E_l x_m\right)}_{(\partial_j E_l)x_m + E_l\left(\underbrace{\partial_j x_m}_{\delta_{jm}}\right)} = \left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)\left[\left(\partial_j E_l\right)x_m + E_l\delta_{jm}\right]$

$= \delta_{il}\delta_{jm}\left(\partial_j E_l\right)x_m + \delta_{il}\delta_{jm}E_l\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\left(\partial_j E_l\right)x_m - \delta_{im}\delta_{jl}E_l\delta_{jm} = x_j\left(\partial_j E_i\right) + \underbrace{\delta_{jj}}_{3}E_i - \left(\partial_j E_j\right)x_i - E_i$

$= x_j\left(\partial_j E_i\right) - x_i\left(\partial_j E_j\right) + 2E_i \to \left(\vec{x}\cdot\nabla\right)\vec{E} - \vec{x}\left(\nabla\cdot\vec{E}\right) + 2\vec{E}$.

d) $\int\int_B \mathrm{div}\vec{K}dxdy = \int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}dy \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x+y^2\\ y+x^2\end{pmatrix} = \int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}dy\,[1+1]$
$= \int_0^\pi dx\; 2y\big|_{y=0}^{\sin x} = 2\int_0^\pi dx\sin x = -2\,\cos x\big|_0^\pi = 4$.
e) Parametrisierung entlang x-Achse: $\vec{x} = \begin{pmatrix}t\\ 0\end{pmatrix}$, $t\in[0,\pi]$.
$\vec{n}\,dt = \begin{pmatrix}y'\\ -x'\end{pmatrix}dt = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}dt$.
$\int_0^\pi \vec{K}\cdot\vec{n}dt = \int_0^\pi \begin{pmatrix}x+y^2\\ y+x^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}dt = -\int_0^\pi\left(0+t^2\right)dt = -\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^\pi = -\frac{\pi^3}{3}$.
f) Parametrisierung: $\vec{x} = \begin{pmatrix}\pi-t\\ \sin(\pi-t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi-t\\ \sin t\end{pmatrix}$, $t\in[0,\pi]$.
$\vec{n}\,dt = \begin{pmatrix}y'\\ -x'\end{pmatrix}dt = \begin{pmatrix}\cos t\\ 1\end{pmatrix}dt$.
Somit wird $\int_0^\pi \vec{K}\cdot\vec{n}dt = \int_0^\pi\begin{pmatrix}x+y^2\\ y+x^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos t\\ 1\end{pmatrix}dt = \int_0^\pi\begin{pmatrix}(\pi-t)+(\sin t)^2\\ \sin t+(\pi-t)^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos t\\ 1\end{pmatrix}dt$
$= \int_0^\pi\left[(\pi-t)\cos t + \sin^2 t\cos t + \sin t + (\pi-t)^2\right]dt = 2+0+2+\frac{\pi^3}{3} = 4+\frac{\pi^3}{3}$.
Lösung der einzelnen Integrale:

- Partielles Integrieren: $\int_0^\pi(\pi-t)\cos t\,dt = (\pi-t)\sin t\big|_0^\pi - \int_0^\pi(-1)\sin t\,dt = 0-\cos t\big|_0^\pi = 2$.

- Stammfunktion erraten: $\int\sin^2 t\cos t\,dt = \frac{\sin^3 t}{3}+c$.

Anmerkung: In der Ebene lautet der Gauß'sche Integralsatz $\int\int_B \mathrm{div}\vec{K}dxdy = \int_{\partial B}\vec{K}\cdot\vec{n}ds$, wobei $\vec{n}$ normal auf die Kurve ∂B steht und nach außen zeigt. Überprüfung zeigt: $4 = -\frac{\pi^3}{3}+4-\frac{\pi^3}{3}$. OK.

5.2 Spektraltheorem

a) Säkulardeterminante: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ führt zu $(-\lambda)\left[(-\lambda)(1-\lambda) - 1\right] + 0 + 1\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) = 0.$

Eigenwerte: $\lambda_3 = 0$, $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

Zugehörige Eigenvektoren: für $\lambda_3 = 0$:

$(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})\,\mathbf{x}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$. Lösen des Gleichungssystems mit 3 Variablen liefert $x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, was z.B. durch den Vektor $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erfüllt wird.

Analog findet man für $\lambda_1 = 2$:

$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\,\mathbf{x}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_1 = 0$, also $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Und für $\lambda_2 = -1$ folgt $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Normierte Eigenvektoren: $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Projektoren:

$\mathbf{E}_1 = \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_1^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1, 1, 2) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{E}_2 = \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_2^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1, 1, -1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{E}_3 = \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_3^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (1, -1, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Spektrale Form:

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{E}_i = 2 \times \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} - 1 \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$

c) Man erhält die Identitätsmatrix:

$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$

d) $p_i(t) = \prod_{1 \le j \le k,\, j \ne i} \frac{t - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$.

$p_1(t) = \frac{t-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \frac{t-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_3} = \frac{t+1}{2+1} \frac{t-0}{2-0} = \frac{1}{6} t\,(t+1)\,,$

$p_2(t) = \frac{t-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \frac{t-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3} = \frac{t-2}{-1-2} \frac{t-0}{-1-0} = \frac{1}{3} t\,(t-2)\,,$

$p_3(t) = \frac{t-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_1} \frac{t-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_2} = \frac{t-2}{0-2} \frac{t+1}{0+1} = -\frac{1}{2}\,(t-2)\,(t+1)\,.$

e) z.B.

$$p_1(\mathbf{A}) = \tfrac{1}{6}\mathbf{A}\left(\mathbf{A}+\mathbf{I}\right) = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_1.$$

f) $\exp(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{E}_i\right)^n \overset{(*)}{=} \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n \underbrace{\mathbf{E}_i^n}_{\mathbf{E}_i}\right)$

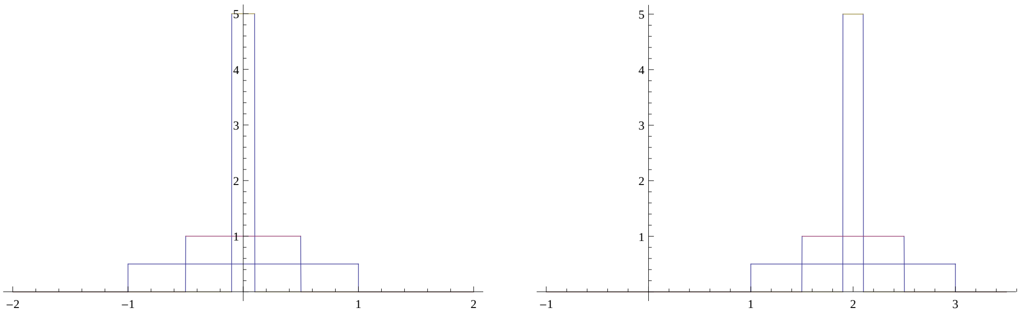
$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}_i}_{\mathbf{1}} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n!}\lambda_i^n \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!}\lambda_i^n \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^{k} \exp\left(\lambda_i\right)\mathbf{E}_i.$$

((*) Das gilt, da $E_i E_j = 0$ für $i \neq j$.)

5.3 Vorschau auf die Delta-Distribution

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)dx = \int_{-1/a}^{1/a} c\,dx = cx\big|_{x=-1/a}^{1/a} = \frac{2c}{a} \overset{!}{=} 1. \qquad \rightarrow \qquad c = \frac{a}{2}.$

b)



c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_a(x-b)dx = \int_{b-1/a}^{b+1/a} f(x)\frac{a}{2}dx = \frac{a}{2}\int_{b-1/a}^{b+1/a}(2x+3)\,dx = \frac{a}{2}\left[2\frac{x^2}{2} + 3x\Big|_{x=b-1/a}^{b+1/a}\right]$

$= \frac{1}{2a}\left[\left(b+\frac{1}{a}\right)^2 - \left(b-\frac{1}{a}\right)^2 + 3\left(b+\frac{1}{a}\right) - 3\left(b-\frac{1}{a}\right)\right] = \frac{a}{2}\left[\frac{4b}{a} + \frac{6}{a}\right] = 2b+3.$

Das entspricht genau $f(b)$.

d) $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta_a(x-b)dx = \int_{b-1/a}^{b+1/a} g(x)\frac{a}{2}dx = \frac{a}{2}\int_{b-1/a}^{b+1/a} x^2 dx = \frac{a}{2}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_{x=b-1/a}^{b+1/a}\right]$

$= \frac{a}{6}\left[(b+1/a)^3 - (b-1/a)^3\right] = \frac{a}{6}\left[b^3 + \frac{3b^2}{a} + \frac{3b}{a^2} + \frac{1}{a^3} - b^3 + \frac{3b^2}{a} - \frac{3b}{a^2} + \frac{1}{a^3}\right]$

$= \frac{a}{6}\left[\frac{6b^2}{a} + \frac{2}{a^3}\right] = b^2 + \frac{1}{3a^2}.$

Das ist ähnlich zu $g(b)$. Für $a \rightarrow \infty$ verschwindet der Zusatzterm, und das Ergebnis entspricht genau $g(b)$.

e) Es ist naheliegend, dass gilt:

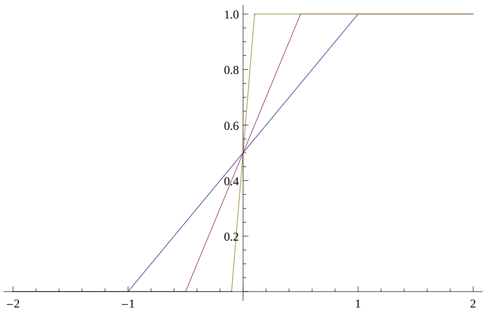
$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\delta(x-b)dx := \lim_{a\rightarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\delta_a(x-b)dx = h(b).$

f) $H_a(x) = \int_{-\infty}^{x}\delta_a(z)dz = \begin{cases} \int_{-1/a}^{1/a}\frac{a}{2}dz & x \geq \frac{1}{a}, \\ \int_{-1/a}^{x}\frac{a}{2}dz & -\frac{1}{a} \leq x \leq \frac{1}{a}, \\ 0 & x \leq -\frac{1}{a}. \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 & x \geq \frac{1}{a}, \\ \frac{a}{2}z\big|_{z=-1/a}^{x} & -\frac{1}{a} \leq x \leq \frac{1}{a}, \\ 0 & x \leq -\frac{1}{a}. \end{cases} \qquad = \begin{cases} 1 & x \geq \frac{1}{a}, \\ \frac{a}{2}(x+\frac{1}{a}) & -\frac{1}{a} \leq x \leq \frac{1}{a}, \\ 0 & x \leq -\frac{1}{a}. \end{cases}$

(für $a > 0$).

g)



h) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)dx = 1$ da $\delta_a(x)$ eine gerade Funktion ist.

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(kx)dx = \int_{-1/(ak)}^{1/(ak)} \frac{a}{2}dx = \frac{a}{2}x\Big|_{x=-1/(ak)}^{1/(ak)} = \frac{2a}{2ak} = \frac{1}{k}$.