6. Tutorium **für 14.11.2014**

6.1 Multiple Choice Fragen

a) Berechne $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}$.
b) Berechne $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}$.
c) Berechne $A_i{}^j\left(\delta^i_j + B_j{}^i + C^i{}_j\right)$ für allgemeine Tensoren **A**, **B** und **C**.
d) Berechne $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}A_{jk}A_{lm}$.
e) Berechne für das Dreieck F, das von den Eckpunkten $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ begrenzt wird, mit $\vec{b} = \begin{pmatrix}-y\\x\\z\end{pmatrix}$ das Flächenintegral $\int_F \text{rot}\vec{b}\cdot d\vec{f}$.
f) Berechne das Linienintegral $\oint_{\partial F}\vec{b}\cdot d\vec{s}$ entlang des angegebenen Dreiecks und überprüfe damit den Satz von Stokes.

6.2 Transformationsmatrix

Gegeben sei ein Punkt mit Koordinaten $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x^1\\x^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ in der Standardbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ mit $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Gegeben seien zwei weitere Basen $\mathcal{B}' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ mit $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ und $\mathcal{B}'' = \{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2\}$ mit $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
a) Von einer zur nächsten Basis wird mittels $\mathbf{f}_i = a_i^{\ j}\mathbf{e}_j$ und $\mathbf{h}_i = \alpha_i^{\ j}\mathbf{f}_j$ transformiert. Bestimme die Transformationsmatrizen $a_i^{\ j}$ und $\alpha_i^{\ j}$ für die angegebenen kovarianten Basisvektoren.
b) Gib für allgemeine Transformationsmatrizen $a_i^{\ j}$ und $\alpha_i^{\ j}$ an, wie die kontravarianten Koordinaten (also x^i, x'^i,x''^i) von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ bzw. von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}''$ transformieren. Zeige allgemein, dass $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i = x'^i\mathbf{f}_i = x''^i\mathbf{h}_i$ gilt.
c) Berechne für die gegebenen Basen die Koordinaten x'^i bzw. x''^i mit Hilfe der (transponierten) inversen Transformationsmatrizen $(a^{-1})_j^{\ i}$ bzw. $(\alpha^{-1})_j^{\ i}$.

d) Skizziere den Punkt $\mathbf{x}$ in der Basis $\mathcal{B}'$ und in der Basis $\mathcal{B}''$ und überprüfe, ob die in Punkt (c) erhaltenen Koordinaten mit der Skizze zusammenpassen.
e) Welcher allgemeine Zusammenhang besteht zwischen den kovarianten Basisvektoren $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{h}_i$ und den kontravarianten dualen Basisvektoren $\mathbf{e}^j$, $\mathbf{f}^j$, $\mathbf{h}^j$? Gib für allgemeine Transformationsmatrizen ${a_i}^j$ und ${\alpha_i}^j$ an, wie sich die dualen Basisvektoren von $\mathcal{B}^*$ nach $\mathcal{B}^{*\prime}$ bzw. von $\mathcal{B}^{*\prime}$ nach $\mathcal{B}^{*\prime\prime}$ transformieren. Zeige allgemein, dass für die so berechneten Basisvektoren $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}_j$ gilt.
f) Berechne die dualen Basisvektoren $\mathbf{f}^i$ und $\mathbf{h}^i$ mittels der Transformationsmatrizen ${a_i}^j$ und ${\alpha_i}^j$.
g) Wie transformieren die kovarianten Koordinaten von $\mathcal{B}^*$ nach $\mathcal{B}^{*\prime}$ bzw. von $\mathcal{B}^{*\prime}$ nach $\mathcal{B}^{*\prime\prime}$? Berechne ${x'}_i$ bzw. ${x''}_i$ mit Hilfe geeigneter Transformationsmatrizen.
h) Skizziere den Punkt $\mathbf{x}$ in den dualen Basen $\mathcal{B}^{*\prime}$ und $\mathcal{B}^{*\prime\prime}$.
i) Der metrische Tensor[1] kann aus dem Skalarprodukt der Basisvektoren berechnet werden, also $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$, ${g'}_{ij} = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j$, etc. Berechne g_{ij}, ${g'}_{ij}$ und ${g''}_{ij}$ für die Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{B}''$.
j) Berechne die Längen $\sqrt{x^i g_{ij} x^j}$, $\sqrt{x'^i {g'}_{ij} x'^j}$ und $\sqrt{x''^i {g''}_{ij} x''^j}$ und vergleiche mit der Skizze.
k) Berechne die Längen $\sqrt{x^i x_i}$, $\sqrt{x'^i {x'}_i}$, und $\sqrt{x''^i {x''}_i}$.

6.3 Lokale Transformation

Polarkoordinaten $x'^1 = r$, $x'^2 = \varphi$ sind definiert durch die Parametrisierung

$$\mathbf{x}(r,\varphi) = x^i \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} x^1(r,\varphi) \\ x^2(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix},$$

mit der Standardbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Berechne die lokale, infinitesimale[2] Transformationsmatrix ${a_i}^j$ von kartesischen Koordinaten in die Polarkoordinaten, und mit dessen Hilfe die neuen (nicht normierten, ortsabhängigen) Basisvektoren $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$.
b) Berechne den metrischen Tensor g'_{ij} mit Hilfe der Basisvektoren $\mathbf{e}'_i$. Sind die neuen Koordinaten überall orthogonal?

[1]Der metrische Tenor wird in der Vorlesung in Kapitel 5.7 genauer behandelt. Für das aktuelle Übungsblatt genügt es, in die hier angegebene Definition einzusetzen.

[2]Obwohl zwischen $x^i = (x,y)^T$ und $x'^i = (r,\varphi)^T$ global kein linearer Zusammenhang besteht, kann man lokal (ortsabhängig) und infinitesimal (also für die Richtungen) einen linearen Zusammenhang angeben: $dx^j(\mathbf{x}) = {a_i}^j(\mathbf{x}) dx'^i(\mathbf{x})$.

c) Berechne die inverse Transformationsmatrix ${a'}_i^{\ j}$, und stelle mit deren Hilfe den Vektor $\mathbf{v}$ mit kartesischen Komponenten $v^i = (0,1)^T$ in dem Koordinatesystem $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ dar.
d) Skizziere die drei Koordinatenlinien $r = 1$, $r = 2$, sowie $\varphi = 1$ graphisch in ein x-y-Diagramm. Zeichne für folgende Punkte die Basisvektoren $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ ein: $(r, \varphi)^T = (1,0)^T$, $(1,1)^T$ und $(2,1)^T$. Zeichne den Vektor $\mathbf{v}$ an diesen Punkten ein, und prüfe, ob die Zerlegung in die Basis $\mathcal{B}'$ für diese Punkte stimmt.

Ankreuzbar: 1a-d, 1ef, 2a-d, 2e-h, 2i-k, 3a-d