6. Tutorium - Lösungen **14.11.2014**

- ANMERKUNG: Es gibt meist mehrere Lösungswege zum Ziel. Verdächtig wäre, stets den selben wie auf einem früheren Lösungszettel zu wählen!

6.1 Multiple Choice Fragen

a) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{iik} = \varepsilon_{11k} + \varepsilon_{22k} + \varepsilon_{33k} = 0 + 0 + 0 = 0.$

b) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}(\varepsilon_{ijk})^2 = \varepsilon_{123}^2 + \varepsilon_{132}^2 + \varepsilon_{213}^2 + \varepsilon_{231}^2 + \varepsilon_{312}^2 + \varepsilon_{321}^2$ $= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6.$

Alternative: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji} = 3 \times 3 - 3 = 6.$

c) ${A_i}^j\left(\delta_j^i + {B_j}^i + {C^i}_j\right) = {A_i}^i + {A_i}^j{B_j}^i + {A_i}^j{(C^T)_j}^i \quad \rightarrow \quad \mathrm{Tr}\left(\mathbf{A} + \mathbf{AB} + \mathbf{AC}^T\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{AB} + \mathbf{A} + \mathbf{CA}^T\right),$ da $\mathrm{Tr}\left(\mathbf{AC}^T\right) = \mathrm{Tr}\left(\left(\mathbf{CA}^T\right)^T\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{CA}^T\right).$

d) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}A_{jk}A_{lm} = \left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right)A_{jk}A_{lm} = A_{jk}A_{jk} - A_{jk}A_{kj} \quad \rightarrow \quad \left(\mathrm{Tr}\mathbf{AA}^T\right) - \mathrm{Tr}\left(\mathbf{AA}\right) = \left(\mathrm{Tr}\mathbf{AA}^T\right) - \mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}^2\right).$

e) $\mathrm{rot}\vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Dreieck parametrisieren: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, mit $s \geq 0,\ t \geq 0,\ s + t \leq 1.$

Flächenelement: $d\vec{f} = \frac{d\vec{x}}{ds} \times \frac{d\vec{x}}{dt}ds\,dt = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} ds\,dt = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} ds\,dt$

$\int_F \mathrm{rot}\vec{b} \cdot d\vec{f} = \int_0^1 ds \int_0^{1-s} dt \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 4\int_0^1 ds \int_0^{1-s} dt = 4\int_0^1 (1-s)\,ds = 4 \times \frac{1}{2} = 2.$

f) $\partial F = C = C_1 + C_2 + C_3.$

$C_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ d\vec{s} = d\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ds.$

$\int_{C_1} \vec{b} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \begin{pmatrix} -2s \\ 1-s \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \int_0^1 (2s + 2 - 2s)\,ds = 2.$

$C_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ d\vec{s} = d\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} ds.$

$\int_{C_2} \vec{b} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \begin{pmatrix} -(2-2s) \\ 0 \\ 3s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} ds = \int_0^1 9s\,ds = \frac{9}{2}.$

$C_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},\ d\vec{s} = d\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} ds.$

$\int_{C_3} \vec{b} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 3-3s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} ds = \int_0^1 (-9 + 9s)\,ds = -9s + 9\frac{s^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{9}{2}.$

$\int_{C_1+C_2+C_3} \vec{b} \cdot d\vec{s} = 2 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 2.$

6.2 Transformationsmatrix und metrischer Tensor

a) $\mathbf{f}_i = a_i^{\ j}\mathbf{e}_j$ bzw. in Komponenten $(f_i)^b = a_i^{\ j}(e_j)^b$ kann man in Matrixschreibweise wie folgt umschreiben:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{(f_1)^1 \quad (f_1)^2} \\ \boxed{(f_2)^1 \quad (f_2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{\ 1} & a_1^{\ 2} \\ a_2^{\ 1} & a_2^{\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{(e_1)^1 \quad (e_1)^2} \\ \boxed{(e_2)^1 \quad (e_2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{\ 1} & a_1^{\ 2} \\ a_2^{\ 1} & a_2^{\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1} \\ \boxed{-1 \quad 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{\ 1} & a_1^{\ 2} \\ a_2^{\ 1} & a_2^{\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0} \\ \boxed{0 \quad 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{\ 1} & a_1^{\ 2} \\ a_2^{\ 1} & a_2^{\ 2} \end{pmatrix}.$$

(Anmerkung: Wenn man die Basisvektoren als Spaltenvektoren in die Matrix schreiben möchte, kann man schreiben $(f_j)^b = f^{(b)}_{\ \ j}$, damit weiterhin der erste Index die Zeile und der zweite die Spalte beschreibt. Damit Indizes, über die summiert wird, nebeneinander stehen, muss die Transformationsmatrix a transponiert werden: $a_i^{\ j} = \left(a^T\right)^j_{\ i}$. Somit hat man $f^{(b)}_{\ \ j} = e^{(b)}_{\ \ j}\left(a^T\right)^j_{\ i}$, was man wie folgt umschreiben kann:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} f^{(1)}_{\ \ 1} \\ f^{(2)}_{\ \ 1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} f^{(1)}_{\ \ 2} \\ f^{(2)}_{\ \ 2} \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} e^{(1)}_{\ \ 1} \\ e^{(2)}_{\ \ 1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} e^{(1)}_{\ \ 2} \\ e^{(2)}_{\ \ 2} \end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(a^T\right)^1_{\ 1} & \left(a^T\right)^1_{\ 2} \\ \left(a^T\right)^2_{\ 1} & \left(a^T\right)^2_{\ 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\ 1} & a_2^{\ 1} \\ a_1^{\ 2} & a_2^{\ 2} \end{pmatrix}.$$

Also von links nach rechts ist der erste Index stets die Zeile und der zweite Index die Spalte, und über nebeneinanderstehende Indizes wird summiert.)

Ähnlich erhält man die Transformationsmatrix α von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}''$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{(h_1)^1 \quad (h_1)^2} \\ \boxed{(h_2)^1 \quad (h_2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{\ 1} & \alpha_1^{\ 2} \\ \alpha_2^{\ 1} & \alpha_2^{\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{(f_1)^1 \quad (f_1)^2} \\ \boxed{(f_2)^1 \quad (f_2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{\ 1} & \alpha_1^{\ 2} \\ \alpha_2^{\ 1} & \alpha_2^{\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0} \\ \boxed{1 \quad 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{\ 1} & \alpha_1^{\ 2} \\ \alpha_2^{\ 1} & \alpha_2^{\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1} \\ \boxed{-1 \quad 1} \end{pmatrix}.$$

Hier muss man noch von rechts mit der Inversen der letzten Matrix multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1} \\ \boxed{-1 \quad 1} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$ Somit folgt:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{\ 1} & \alpha_1^{\ 2} \\ \alpha_2^{\ 1} & \alpha_2^{\ 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0} \\ \boxed{1 \quad 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $x'^i = \left(a^{-1}\right)_j^{\ i} x^j$ und $x''^i = \left(\alpha^{-1}\right)_j^{\ i} x'^j$.

Damit gilt: $x''^i\mathbf{h}_i = \left(\alpha^{-1}\right)_j^{\ i} x'^j \alpha_i^{\ k}\mathbf{f}_k = \underbrace{\left(\alpha^{-1}\right)_j^{\ i}\alpha_i^{\ k}}_{\delta_j^k} x'^j\mathbf{f}_k = x'^j\mathbf{f}_j$.

$x'^j\mathbf{f}_j = \left(a^{-1}\right)_k^{\ j} x^k a_j^{\ l}\mathbf{e}_l = \underbrace{\left(a^{-1}\right)_k^{\ j} a_j^{\ l}}_{\delta_k^l} x^k\mathbf{e}_l = x^k\mathbf{f}_k$.

c)

Für die Transformation $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ gilt: $x'^i = \left(a^{-1}\right)_j^{\ i} x^j$. In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(a^{-1}\right)_1^{\ 1} & \left(a^{-1}\right)_1^{\ 2} \\ \left(a^{-1}\right)_2^{\ 1} & \left(a^{-1}\right)_2^{\ 2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a_1^{\ 1} & a_1^{\ 2} \\ a_2^{\ 1} & a_2^{\ 2} \end{pmatrix}^{-1}\right]^T \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

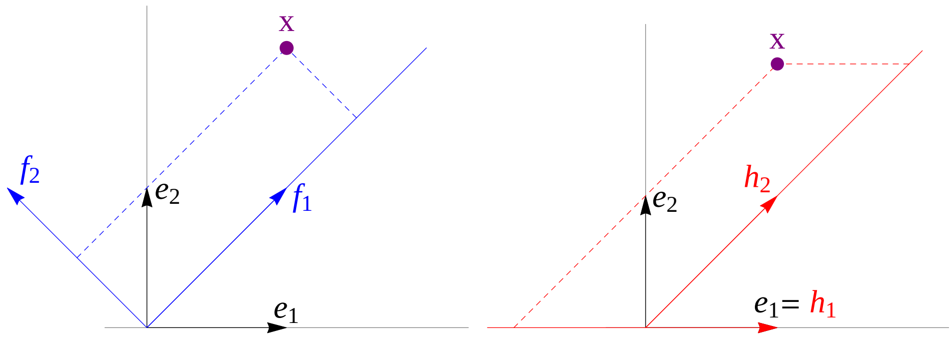
$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right]^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right]^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Für die Transformation $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}''$ gilt: $x''^i = \left(\alpha^{-1}\right)_j^{\ i} x'^j$. In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x''^1 \\ x''^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\alpha^{-1}\right)_1^{\ 1} & \left(\alpha^{-1}\right)_1^{\ 2} \\ \left(\alpha^{-1}\right)_2^{\ 1} & \left(\alpha^{-1}\right)_2^{\ 2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \alpha_1^{\ 1} & \alpha_1^{\ 2} \\ \alpha_2^{\ 1} & \alpha_2^{\ 2} \end{pmatrix}^{-1}\right]^T \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\right]^T \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right]^T \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

d)



e) $\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^j$, $\mathbf{f}^j \cdot \mathbf{f}_i = \delta_i^j$, $\mathbf{h}^j \cdot \mathbf{h}_i = \delta_i^j$.
$\mathbf{f}^i = \left(a^{-1}\right)_j{}^i \mathbf{e}^j$, $\mathbf{h}^i = \left(\alpha^{-1}\right)_j{}^i \mathbf{f}^j$.

$$\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}_j = \left(\alpha^{-1}\right)_k{}^i \mathbf{f}^k \cdot \alpha_j{}^l \mathbf{f}_l = \left(\alpha^{-1}\right)_k{}^i \alpha_j{}^l \underbrace{\mathbf{f}^k \cdot \mathbf{f}_l}_{\delta_l^k} = \left(\alpha^{-1}\right)_k{}^i \alpha_j{}^k = \alpha_j{}^k \left(\alpha^{-1}\right)_k{}^i = \delta_j^i.$$

$$\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \left(a^{-1}\right)_k{}^i \mathbf{e}^k \cdot a_j{}^l \mathbf{e}_l = \left(a^{-1}\right)_k{}^i a_j{}^l \underbrace{\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_l}_{\delta_l^k} = \left(a^{-1}\right)_k{}^i a_j{}^k = a_j{}^k \left(a^{-1}\right)_k{}^i = \delta_j^i.$$

f) $\mathbf{f}^i = \left(a^{-1}\right)_j{}^i \mathbf{e}^j$. bzw. $\left(f^i\right)_b = \left(a^{-1}\right)_j{}^i \left(e^j\right)_b$

bzw. damit gleiche Indizes nebeneinander stehen: $\left(f^i\right)_b = \left(\left[a^{-1}\right]^T\right)^i{}_j \left(e^j\right)_b$.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\left(f^1\right)_1 \quad \left(f^1\right)_2} \\ \boxed{\left(f^2\right)_1 \quad \left(f^2\right)_2} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \left(a^{-1}\right)_1{}^1 & \left(a^{-1}\right)_1{}^2 \\ \left(a^{-1}\right)_2{}^1 & \left(a^{-1}\right)_2{}^2 \end{pmatrix}\right]^T \begin{pmatrix} \boxed{\left(e^1\right)_1 \quad \left(e^1\right)_2} \\ \boxed{\left(e^2\right)_1 \quad \left(e^2\right)_1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \left(a^{-1}\right)_1{}^1 & \left(a^{-1}\right)_2{}^1 \\ \left(a^{-1}\right)_1{}^2 & \left(a^{-1}\right)_2{}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right]^T \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0} \\ \boxed{0 \quad 1} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right]^T \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0} \\ \boxed{0 \quad 1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0} \\ \boxed{0 \quad 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}} \\ \boxed{-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Und für die zweite Basistransformation:
$\mathbf{h}^i = \left(\alpha^{-1}\right)_j{}^i \mathbf{f}^j$. bzw. $\left(h^i\right)_b = \left(\alpha^{-1}\right)_j{}^i \left(f^j\right)_b$

bzw. damit gleiche Indizes nebeneinander stehen: $\left(h^i\right)_b = \left(\left[\alpha^{-1}\right]^T\right)^i{}_j \left(f^j\right)_b$.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\left(h^1\right)_1 \quad \left(h^1\right)_2} \\ \boxed{\left(h^2\right)_1 \quad \left(h^2\right)_2} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \left(\alpha^{-1}\right)_1{}^1 & \left(\alpha^{-1}\right)_1{}^2 \\ \left(\alpha^{-1}\right)_2{}^1 & \left(\alpha^{-1}\right)_2{}^2 \end{pmatrix}\right]^T \begin{pmatrix} \boxed{\left(f^1\right)_1 \quad \left(f^1\right)_2} \\ \boxed{\left(f^2\right)_1 \quad \left(f^2\right)_1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \left(\alpha^{-1}\right)_1{}^1 & \left(\alpha^{-1}\right)_2{}^1 \\ \left(\alpha^{-1}\right)_1{}^2 & \left(\alpha^{-1}\right)_2{}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix}$$

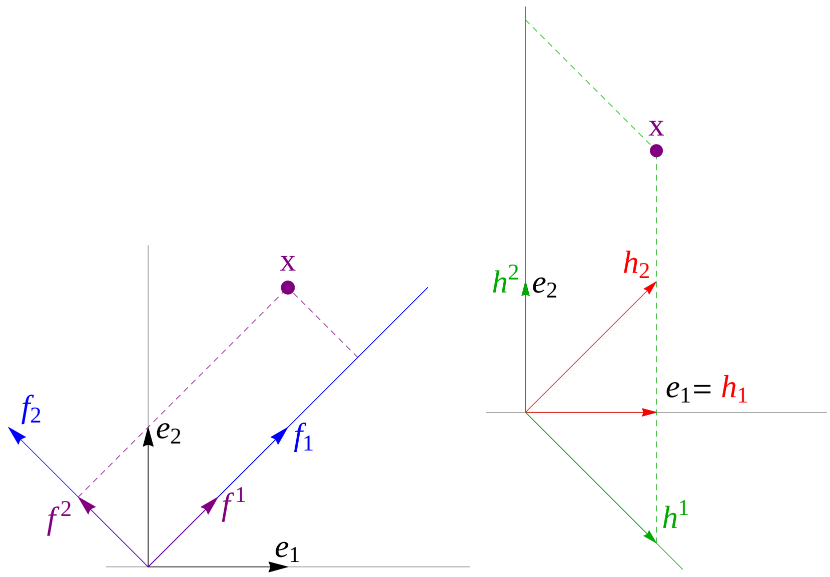
$$\begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\right]^T \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}} \\ \boxed{-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right]^T \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}} \\ \boxed{-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}} \\ \boxed{-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad -1} \\ \boxed{0 \quad 1} \end{pmatrix}.$$

g) $x'_i = a_i^{\ j} x_j$, $x''_i = \alpha_i^{\ j} x'_j$.

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{\ 1} & a_1^{\ 2} \\ a_2^{\ 1} & a_2^{\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{\ 1} & \alpha_1^{\ 2} \\ \alpha_2^{\ 1} & \alpha_2^{\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

h)



i) $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$.

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$g'_{ij} = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j$.

$$\begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$g''_{ij} = \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_j$.

$$\begin{pmatrix} g''_{11} & g''_{12} \\ g''_{21} & g''_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

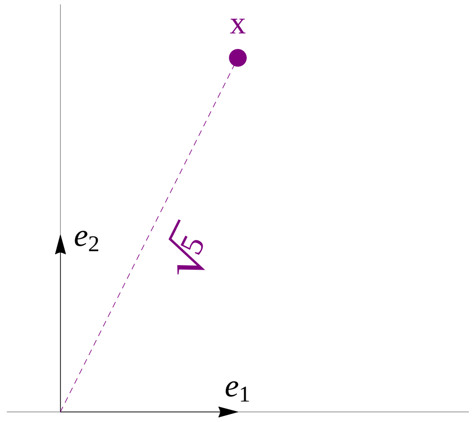
j) $\sqrt{x^i g_{ij} x^j} = \sqrt{\begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{5}$.

$$\sqrt{x'^i g'_{ij} x'^j} = \sqrt{\begin{pmatrix} x'^1 & x'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}.$$

$$\sqrt{x''^i g''_{ij} x''^j} = \sqrt{\begin{pmatrix} x''^1 & x''^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g''_{11} & g''_{12} \\ g''_{21} & g''_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''^1 \\ x''^2 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} = \sqrt{-1+6} = \sqrt{5}.$$



k) $\sqrt{x^i x_i} = \sqrt{\begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{5}.$

$\sqrt{x'^i x'_i} = \sqrt{\begin{pmatrix} x'^1 & x'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}.$

$\sqrt{x''^i x''_i} = \sqrt{\begin{pmatrix} x''^1 & x''^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} = \sqrt{-1+6} = \sqrt{5}.$

6.3 Lokale Transformation

a) Transformationsmatrix für kovariante Komponenten: ${a_i}^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \to$

$$\begin{pmatrix} {a_1}^1 & {a_1}^2 \\ {a_2}^1 & {a_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (r\cos\varphi)}{\partial r} & \frac{\partial (r\sin\varphi)}{\partial r} \\ \frac{\partial (r\cos\varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial (r\sin\varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Basisvektoren: $\mathbf{e}'_i = {a_i}^j \mathbf{e}_j$.

$\to \mathbf{e}'_1 = {a_1}^1 \mathbf{e}_1 + {a_1}^2 \mathbf{e}_2 = \cos\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}.$

$\mathbf{e}'_2 = {a_2}^1 \mathbf{e}_1 + {a_2}^2 \mathbf{e}_2 = -r\sin\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cos\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}.$

b)

$$g'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j \to \begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & \cos\varphi\,(-r\sin\varphi) + \sin\varphi r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi\cos\varphi + r\cos\varphi\sin\varphi & r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

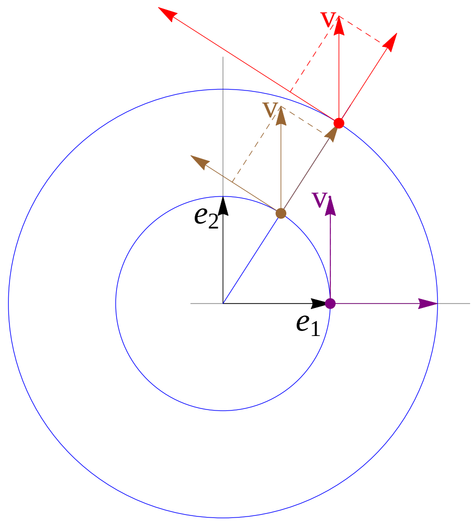
Orthogonal, da nur Diagonalelemente besetzt sind. (Für $r = 0$ ist Metrik singulär, da Determinante verschwindet $\leftrightarrow$ nicht invertierbar.)

c) Transformationsmatrix für kontravariante Komponenten: $a' = a^{-1}$. Invertieren von a:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos\varphi & \sin\varphi & 1 & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} & \frac{1}{\cos\varphi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos\varphi\sin\varphi} & \frac{1}{\cos\varphi} & \frac{1}{r\sin\varphi} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos\varphi & -\frac{1}{r}\sin\varphi \\ 0 & 1 & \sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{array}\right).$$

Transformation: $v'^j = {a'_i}^j v^i = {\left(a'^T\right)^j}_i v^i = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}.$

d)



Basisvektoren kartesisch: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. $v^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

In Polarkoordinaten, z.B. an der Stelle $x'^i = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$: $x^i = \begin{pmatrix} 2\cos 1 \\ 2\sin 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,08 \\ 1,68 \end{pmatrix}$

$\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos 1 \\ \sin 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sin 1 \\ 2\cos 1 \end{pmatrix} \right\} \approx \left\{ \begin{pmatrix} 0,54 \\ 0,84 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1,86 \\ 1,08 \end{pmatrix} \right\}$; $v'^i = \begin{pmatrix} \sin 1 \\ \frac{1}{2}\cos 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,84 \\ 0,27 \end{pmatrix}$.