7. Tutorium **für 21.11.2014**

7.1 Multiple Choice Fragen

a) „Berechne“ $\delta_a(kx)$ für $k > 0$ (= forme auf einen alternativen Ausdruck mit einfacherem Argument ...$\delta_a(x)$ um, der in Integralen im Limes $a \to \infty$ den gleichen Wert ergeben würde), für die Funktion δ_a von Beispiel 5.3. (Lösungsmöglichkeiten: $\delta_a(x)$, $k+\delta_a(x)$, $\frac{1}{k}\delta_a(x)$, $k\delta_a(x)$. Anmerkung: Skizziere den ursprünglichen und den umgeformten Ausdruck für ein gegebenes a und k. Wie unterscheiden sich diese? Was haben sie gemeinsam? Was passiert im Limes $a \to \infty$?)
b) Berechne $\delta_a(kx)$ für $k \neq 0$. (Hinweis: beachte sowohl 5.3h als auch 5.3i.)
c) Berechne $\delta_a(f(x))$ näherungsweise für eine Funktion $f(x)$, die eine einfache Nullstelle bei $x = b$ hat. (Hinweis: Nähere $f(x)$ in der Nähe von b durch die entsprechende Taylor-Reihe an.)
d) Berechne $\delta_a\left((x-b)(x-c)\right)$ näherungsweise für $|b-c| \gg \frac{1}{a}$. (Hinweis: betrachte das Argument als Funktion $f(x) = (x-b)(x-c)$, und wiederhole die Überlegung von 7.1b zunächst für die erste Nullstelle, und dann für die zweite Nullstelle.)
e) Berechne $g^{ij}B_{ij}$ mit $B_{ij} = A_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}A^k{}_k$ für eine nicht-orthogonale, dreidimensionale Metrik.
f) Berechne $B^{ij}B^{mn}\left(g_{im}g_{jn} - g_{in}g_{jm}\right)$ mit $B_{ij} = A_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}A^k{}_k$ für eine nicht-orthogonale, dreidimensionale Metrik.

7.2 Residuensatz

a) Berechne alle Lösungen von $x^n + 1 = 0$ über die Formel von de Moivre. Wie sehen die Lösungen für $n = 4$ aus?
b) Sei $f(x) = g(x)/h(x)$, wobei g und h analytisch um einen Punkt c seien, und h eine einfache Nullstelle am Punkt c hat. Zeige, dass dann das Residuum an der Stelle c berechnet werden kann durch

$$\mathrm{Res}_{x\to c} f(x) = \frac{g(c)}{h'(c)}.$$

(Hinweis: Nähere $h(x)$ in der Umgebung von c an durch $h(x) \approx (x-c)h'(c)$).
c) Berechne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+ax+b}{x^4+1} dx$$

über den Residuensatz.

7.3 Transformation von Differentialoperatoren (Fortsetzung von Beispiel 6.3)

a) Berechne den Gradient in Polarkoordinaten[1].
Hinweis: Der Gradient soll sowohl in kartesischen als auch in Polarkoordinaten den gleichen Vektor ergeben:

$$\begin{aligned}\nabla\phi(x,y) &= (\partial_x\phi(x,y))\,\mathbf{e}^x + (\partial_y\phi(x,y))\,\mathbf{e}^y \\ &= (?..?\phi(r,\varphi))\,\mathbf{e}^r + (?..?\phi(r,\varphi))\,\mathbf{e}^\varphi.\end{aligned}$$

Um von der ersten zur zweiten Zeile zu gelangen, kann einerseits die alte durch die neue Basis ausgedrückt werden ($\mathbf{e}^x = ...\mathbf{e}^r + ...\mathbf{e}^\varphi$), und andererseits die verallgemeinerte Kettenregel angewendet werden ($\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi}$).

Nicht-orthogonale Parabelkoordinaten

Eine Koordinatentransformation von (x, y) nach (r, φ) sei durch folgende Parametrisierung gegeben, die Parabeln beschreibt:

$$\mathbf{x}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \\ r\varphi \end{pmatrix}.$$

(Für kleine Winkel $|\varphi| \ll 1$ ist das eine Näherung an die Polarkoordinaten mit Fehler $O(\varphi^3)$.)
b) Berechne die lokale, infinitesimale Transformationsmatrix $a_i^{\ j}$ von kartesischen Koordinaten in die Parabelkoordinaten, und mit dessen Hilfe die neuen (nicht normierten, ortsabhängigen) Basisvektoren $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$[2].
c) Berechne den metrischen Tensor g'_{ij} mit Hilfe der Basisvektoren $\mathbf{e}'_i$. Sind die neuen Koordinaten überall orthogonal?
d) Berechne die inverse Transformationsmatrix $a'_i{}^{j}$, und stelle mit deren Hilfe den Vektor $\mathbf{v}$ mit kartesischen Komponenten $v^i = (0, 1)^T$ in dem Koordinatesystem $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ dar.
e) Skizziere die drei Koordinatenlinien $r = 1$, $r = 2$, sowie $\varphi = 1$ graphisch in ein x-y-Diagramm. Zeichne für folgende Punkte die Basisvektoren $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ ein: $(r, \varphi)^T = (1, 0)^T$, $(1, 1)^T$ und $(2, 1)^T$. Zeichne den Vektor $\mathbf{v}$ an diesen Punkten ein, und prüfe, ob die Zerlegung in die Basis $\mathcal{B}'$ für diese Punkte stimmt.

[1] Beachte beim Vergleich des Endergebnisses mit der Literatur, dass dort meist normierte (d.h. Einheits-)Basisvektoren verwendet werden, z.B. auf http://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten#Gradient .

[2] Zwischenergebnis zur Überprüfung: Die invertierte Transformationsmatrix lautet $a^{-1} = \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\varphi}{r} \\ \varphi & \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \end{pmatrix}$.

f) Berechne den Gradient in Parabelkoordinaten.

Ankreuzbar: 1a-d, 1ef, 2ab, 2c, 3a, 3b-f