7. Tutorium - Lösungen **21.11.2014**

- ANMERKUNG: Jeder ist selber für den sinnvollen Umgang mit Lösungszetteln verantwortlich. Letztendlich geht es darum, was man selber lernt und versteht.

7.1 Multiple Choice Fragen

a) $\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_a(kx)dx = \frac{1}{k} = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_a(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k}\delta_a(x)dx$.
Daher entspricht $\delta_a(kx) \approx \frac{1}{k}\delta_a(x)$ im Limes $a \to \infty$.
Beim Skizzieren der Funktion ergeben sich Rechtecke mit unterschiedlichen Breiten und Höhen, aber die Fläche ist stets $\frac{1}{k}$. Im Limes $a \to \infty$ werden beide Rechtecke unendlich schmal und hoch, sind also bezüglich ihrer Wirkung innerhalb des Integrals nicht mehr voneinander zu unterscheiden.
b) $\delta_a(kx) \approx \frac{1}{|k|}\delta_a(x)$.
c) Taylor-Reihe um $x = b$ herum: $f(x) = f(b) + (x-b)f'(b) + \frac{(x-b)^2}{2}f''(b) + \ldots$.
Da um eine Nullstelle entwickelt wird, gilt $f(b) = 0$.
Die Funktion $\delta_a(f(x))$ verschwindet nicht nur in einer kleinen Umgebung von $x = b$, sodass $\varepsilon := x - b$ sehr klein, und $\varepsilon^2 = (x-b)^2$ noch kleiner und daher vernachlässigbar ist, solange $f'(b) \neq 0$ (was bei einfacher Nullstelle gegeben ist.)
Also $\delta_a(f(x)) \approx \delta_a\left((x-b)\,f'(b)\right) \approx \frac{1}{|f'(b)|}\delta_a(x-b)$.
d) $f(x) = (x-b)\,(x-c) \qquad \to \qquad f'(x) = 2x - b - c$.
In der Nähe von $x \approx b$ gilt daher: $\delta_a(f(x)) \approx \left.\frac{1}{|f'(x)|}\right|_{x=b}\delta_a(x-b) = \frac{1}{|b-c|}\delta_a(x-b)$.
Analog gilt in der Nähe von $x \approx c$: $\delta_a(f(x)) \approx \frac{1}{|c-b|}\delta_a(x-c)$.
Plotten der Funktionen legt nahe, dass man diese beiden Lösungen einfach addieren muss:
$\delta_a\left((x-b)\,(x-c)\right) \approx \frac{1}{|b-c|}\left[\delta_a(x-b) + \delta_a(x-c)\right]$.
e) $g^{ij}B_{ij} = g^{ij}\left(A_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}A^k{}_k\right) = A^i{}_i - \frac{1}{2}\underbrace{\delta^i_i}_{3}A^k{}_k = -\frac{1}{2}A^i{}_i$.

f) $B^{ij}B_{ij} = \left(A^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}A^k{}_k\right)\left(A_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}A^m{}_m\right) = A^{ij}A_{ij} - \frac{1}{2}A^i{}_iA^k{}_k - \frac{1}{2}A^i{}_iA^m{}_m + \frac{1}{4}\underbrace{\delta^i_i}_{3}A^k{}_kA^m{}_m = A^{ij}A_{ij} - \frac{1}{4}\left(A^k{}_k\right)^2$.
$B^{ij}B^{mn}\left(g_{im}g_{jn} - g_{in}g_{jm}\right) = B^{ij}B_{ij} - B^{ij}B_{ji} = \left[A^{ij}A_{ij} - \frac{1}{4}\left(A^k{}_k\right)^2\right] - \left[A^{ij}A_{ji} - \frac{1}{4}\left(A^k{}_k\right)^2\right] = A^{ij}A_{ij} - A^{ij}A_{ji}$.

7.2 Residuensatz

a) Lösungen von $x^n + 1 = 0$, also $x^n = -1$: Satz von de Moivre: $e^{in\varphi} = (e^{i\varphi})^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$. Rechte Seite ergibt -1 für $n\varphi = \pi(2N+1)$ mit ganzzahligem N. Daher $\varphi = \frac{\pi}{n}(2N+1)$ mit $N = 0, 1, \ldots, n-1$.
Für $n = 4$ hat man $x_1 = e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $x_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $x_3 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $x_4 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.
b) Da $h(x)$ eine einfache Nullstelle bei $x = c$ hat, gilt $h(x) \approx (x-c)h'(c)$ in einer Umgebung von $x = c$. Daher:
$\mathrm{Res}_{x\to c}f(x) = \mathrm{Res}_{x\to c}f(x) = \mathrm{Res}_{x\to c}\frac{g(x)}{h(x)} \approx \mathrm{Res}_{x\to c}\frac{g(x)}{(x-c)h'(c)} = \lim_{x\to c}(x-c)\frac{g(x)}{(x-c)h'(c)}$
$= \lim_{x\to c}\frac{g(x)}{h'(c)} = \frac{g(c)}{h'(c)}$.
Wem das „$\approx$" zu ungenau ist, der kann $h(x)$ auch in einer Taylor-Reihe $h(x) = 0 + (x-c)\,h'(c) + \frac{1}{2!}(x-c)^2\,h''(c) + \ldots$ expandieren und dann die Laurentreihe des Quotienten bilden. Der Koeffizient $a_{-1} = g(c)/h'(c)$ der Laurentreihe $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(x-c)^n$ ist dann genau das gesuchte Residuum.
c) Die Pole befinden sich bei $e^{\pm i\pi/4}$ und $e^{\pm 3i\pi/4}$. Man kann die oberen zwei Pole wählen, und den Integrationsweg über den oberen Halbkreis schließen, der keinen Beitrag liefert: Beitrag über oberen Halbkreis $\mathcal{C}$ mit $x = re^{i\varphi}$, $dx = rie^{i\varphi}d\varphi$ und r groß aber konstant liefert:

$\int_{\mathcal{C}} \frac{x^2+ax+b}{x^4+1}dx = \int_0^\pi \frac{\left(re^{i\varphi}\right)^2+are^{i\varphi}+b}{(re^{i\varphi})^4+1} rie^{i\varphi}d\varphi \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\pi \frac{\left(re^{i\varphi}\right)^2}{(re^{i\varphi})^4} rie^{i\varphi}d\varphi = i\int_0^\pi \frac{1}{re^{i\varphi}}d\varphi \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$
Die Residuen an den Polen der oberen Halbebene sind
$\mathrm{Res}_{x\to e^{i\pi/4}} \frac{x^2+ax+b}{x^4+1} = \left.\frac{x^2+ax+b}{4x^3}\right|_{x=e^{i\pi/4}} = \frac{i+ae^{i\pi/4}+b}{4e^{3i\pi/4}}.$
$\mathrm{Res}_{x\to e^{3i\pi/4}} \frac{x^2+ax+b}{x^4+1} = \left.\frac{x^2+ax+b}{4x^3}\right|_{x=e^{3i\pi/4}} = \frac{-i+ae^{3i\pi/4}+b}{4e^{9i\pi/4}} = \frac{-i+ae^{3i\pi/4}+b}{4e^{i\pi/4}}.$
Schließen im oberen Halbkreis (positiver Umlaufsinn, daher kein zusätzliches „-") ergibt:
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+ax+b}{x^4+1}dx = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{x\to e^{i\pi/4}}\frac{x^2+ax+b}{x^4+1} + \mathrm{Res}_{x\to e^{3i\pi/4}}\frac{x^2+ax+b}{x^4+1}\right)$
$= 2\pi i\left(\frac{i+ae^{i\pi/4}+b}{4}e^{-3i\pi/4} + \frac{-i+ae^{3i\pi/4}+b}{4}e^{-i\pi/4}\right)$
$= \frac{\pi i}{2}\left[i\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) + a\left(-i+i\right) + b\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(1+b\right).$
Alternativ könnte man den Halbreis auch unten schließen, wobei man ein zusätzliches negatives Vorzeichen für den negativen Umlaufsinn berücksichtigen muss.

7.3 Transformation von Differentialoperatoren

a) $\mathbf{e}^j = a_i{}^j\mathbf{e}'^i = \left(a^T\right)^j{}_i\,\mathbf{e}'^i.$

$$\to \begin{pmatrix} \mathbf{e}^x \\ \mathbf{e}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{e}^r \\ \mathbf{e}^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\mathbf{e}^r - r\sin\varphi\mathbf{e}^\varphi \\ \sin\varphi\mathbf{e}^r + r\cos\varphi\mathbf{e}^\varphi \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung transformiert genau wie die Basisvektoren mit a' zurück:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x'^j} = a'_i{}^j\frac{\partial}{\partial x'^j} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\frac{1}{r}\sin\varphi \\ \sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\partial_r - \frac{1}{r}\sin\varphi\partial_\varphi \\ \sin\varphi\partial_r + \frac{1}{r}\cos\varphi\partial_\varphi \end{pmatrix}.$$

Kombiniert ergibt das:
$\nabla\phi(x,y) = \left(\partial_x\phi(x,y)\right)\mathbf{e}^x + \left(\partial_y\phi(x,y)\right)\mathbf{e}^y =$
$= \left(\cos\varphi\partial_r\phi(r,\varphi) - \frac{1}{r}\sin\varphi\partial_\varphi\phi(r,\varphi)\right)\left(\cos\varphi\mathbf{e}^r - r\sin\varphi\mathbf{e}^\varphi\right) + \left(\sin\varphi\partial_r\phi(r,\varphi) + \frac{1}{r}\cos\varphi\partial_\varphi\phi(r,\varphi)\right)\left(\sin\varphi\mathbf{e}^r + r\cos\varphi\mathbf{e}^\varphi\right)$
$= \left(\cos^2\varphi\partial_r\phi - \frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\partial_\varphi\phi + \sin^2\varphi\partial_r\phi + \frac{1}{r}\cos\varphi\sin\varphi\partial_\varphi\phi\right)\mathbf{e}^r + \left(0\times\partial_r\phi + \sin^2\varphi\partial_\varphi\phi + \cos^2\varphi\partial_\varphi\phi\right)\mathbf{e}^\varphi$
$= \left(\partial_r\phi(r,\varphi)\right)\mathbf{e}^r + \left(\partial_\varphi\phi(r,\varphi)\right)\mathbf{e}^\varphi.$

Nicht-orthogonale Parabelkoordinaten

b) Transformationsmatrix für kovariante Komponenten: $a_i{}^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \to$

$$\begin{pmatrix} a_1{}^1 & a_1{}^2 \\ a_2{}^1 & a_2{}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\left(r\left(1-\varphi^2/2\right)\right)}{\partial r} & \frac{\partial(r\varphi)}{\partial r} \\ \frac{\partial\left(r\left(1-\varphi^2/2\right)\right)}{\partial\varphi} & \frac{\partial(r\varphi)}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\varphi^2}{2} & \varphi \\ -r\varphi & r \end{pmatrix}.$$

Basisvektoren: $\mathbf{e}'_i = a_i{}^j\mathbf{e}_j.$
$\to \mathbf{e}'_1 = a_1{}^1\mathbf{e}_1 + a_1{}^2\mathbf{e}_2 = \left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\varphi^2}{2} \\ \varphi \end{pmatrix}.$
$\mathbf{e}'_2 = a_2{}^1\mathbf{e}_1 + a_2{}^2\mathbf{e}_2 = -r\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\varphi \\ r \end{pmatrix}.$
c)

$$g'_{ij} = \mathbf{e}'_i\cdot\mathbf{e}'_j \to \begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1\cdot\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_1\cdot\mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_2\cdot\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2\cdot\mathbf{e}'_2 \end{pmatrix}$$

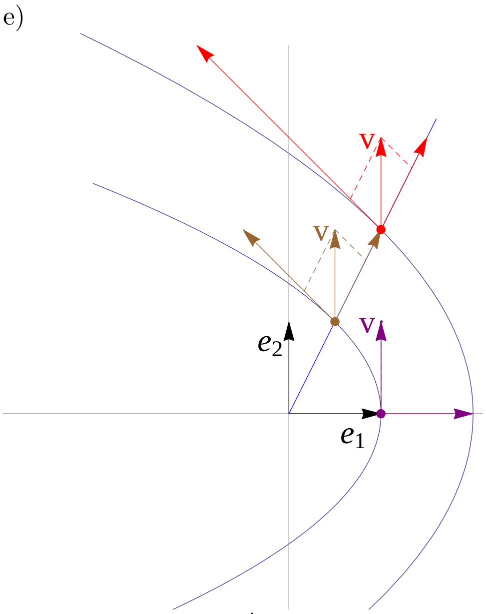
$$= \begin{pmatrix} \left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)^2 + \varphi^2 & \left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)(-r\varphi) + \varphi r \\ -r\varphi\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right) + r\varphi & r^2\varphi^2 + r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{\varphi^4}{4} & r\frac{\varphi^3}{2} \\ r\frac{\varphi^3}{2} & r^2\left(1+\varphi^2\right) \end{pmatrix}.$$

Nicht-orthogonal, da nicht nur Diagonalelemente besetzt sind. (Orthogonal nur für $\varphi = 0$, $r > 0$. Für $r = 0$ ist Metrik singulär.)
d) Transformationsmatrix für kontravariante Komponenten: $a' = a^{-1}$. Invertieren von a:

$$a^{-1} = \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\varphi}{r} \\ \varphi & \frac{1}{r}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Transformation: $v'^j = a'{}_i{}^j v^i = \left(a'^T\right)^j{}_i v^i = \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ -\frac{\varphi}{r} & \frac{1}{r}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{1}{r}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right) \end{pmatrix}$.

e)



f) $\mathbf{e}^j = a_i{}^j \mathbf{e}'^i = \left(a^T\right)^j{}_i \mathbf{e}'^i$.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}^x \\ \mathbf{e}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\varphi^2}{2} & -r\varphi \\ \varphi & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^r \\ \mathbf{e}^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)\mathbf{e}^r - r\varphi\mathbf{e}^\varphi \\ \varphi\mathbf{e}^r + r\mathbf{e}^\varphi \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung transformiert genau wie die Basisvektoren mit a' zurück:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} = a'{}_i{}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \rightarrow \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\varphi}{r} \\ \varphi & \frac{1}{r}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}} \begin{pmatrix} \partial_r - \frac{\varphi}{r}\partial_\varphi \\ \varphi\partial_r + \frac{1}{r}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)\partial_\varphi \end{pmatrix}.$$

Kombiniert ergibt das:
$\nabla\phi(x,y) = \left[\mathbf{e}^x\partial_x + \mathbf{e}^y\partial_y\right]\phi(x,y) =$
$= \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}}\left[\left(\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)\mathbf{e}^r - r\varphi\mathbf{e}^\varphi\right)\left(\partial_r - \frac{\varphi}{r}\partial_\varphi\right) + \left(\varphi\mathbf{e}^r + r\mathbf{e}^\varphi\right)\left(\varphi\partial_r + \frac{1}{r}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)\partial_\varphi\right)\right]\phi(r,\varphi)$
$= \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}}\left[\mathbf{e}^r\left(\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)\partial_r - \left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)\frac{\varphi}{r}\partial_\varphi + \varphi^2\partial_r + \frac{\varphi}{r}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)\partial_\varphi\right)\right.$
$\left. + \mathbf{e}^\varphi\left(-r\varphi\partial_r + \varphi^2\partial_\varphi + r\varphi\partial_r + \left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)\partial_\varphi\right)\right]\phi(r,\varphi)$
$= \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}}\left[\mathbf{e}^r\left(\left(1+\frac{\varphi^2}{2}\right)\partial_r + 0\times\partial_\varphi\right) + \mathbf{e}^\varphi\left(0\times\partial_r + \left(1+\frac{\varphi^2}{2}\right)\partial_\varphi\right)\right]\phi(r,\varphi)$
$= \left[\mathbf{e}^r\partial_r + \mathbf{e}^\varphi\partial_\varphi\right]\phi(r,\varphi)$.