8. Tutorium **für 28.11.2014**

8.1 Multiple Choice Fragen

a) Berechne das Integral

$$\oint_{C_1} \frac{3z^2 + 2z}{z^3 + z^2 - 2} dz$$

entlang des rechten ($\mathrm{Re}(z) > 0$) geschlossenen Halbkreises C_1 mit Radius $R (> \sqrt{2})$ in die mathematisch positive Richtung.
b) Berechne das gleiche Integral aber entlang des linken geschlossenen Halbkreises C_2 mit Radius $R (> \sqrt{2})$.
c) Berechne das Integral

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-iR}^{iR} \frac{3z^2 + 2z}{z^3 + z^2 - 2} dz$$

entlang der imaginären Achse ($\mathrm{Re}(z) = 0$).
d) Berechne das Integral

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-iR}^{iR} \frac{3z + 2}{z^3 + z^2 - 2} dz$$

entlang der imaginären Achse ($\mathrm{Re}(z) = 0$).
e) Berechne

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z^2 + 4)} dz$$

wobei C ein Einheitskreis mit Zentrum $z = -1$ ist.
f) Berechne

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C z^2 e^{1/z} dz$$

wobei C ein Einheitskreis mit Zentrum $z = 0$ ist.

8.2 Maxwell-Gleichungen

a) Schreibe die Maxwellgleichungen und die Lorentzkraftdichte (in CGS Einheiten und mit c = 1) in Indexschreibweise:

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho\,, \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0\,, \quad \mathrm{rot}\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\,, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\,, \quad \mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

b) Berechne aus der dritten Gleichung die Divergenz des Stromes $\mathbf{j}$ in Indexschreibweise und zeige, dass dies auf die Kontinuitätsgleichung führt.
c) Zeige in Indexschreibweise, dass $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ und $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\phi - \partial_t \mathbf{A}$ die zweite und die vierte Maxwellgleichung lösen.

8.3 Distributionen und Delta-Folgen

a) Berechne die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x + i\varepsilon} dx\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x - i\varepsilon} dx$$

wobei $\varepsilon > 0$.
b) Berechne die Cauchyschen Hauptwerte

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx\,, \quad \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx$$

und zeige

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi\,.$$

c) Überprüfe durch Anwenden auf eine Testfunktion, ob die folgenden Folge $\{f_n\}$ eine Deltafolge für $n \to \infty$ ist: $f_n(x) = \frac{1}{n\pi x^2}\sin^2(nx)$.
d) Berechne das Integral für $E > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(E - \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) dx\, dp$$

e) Berechne das Integral für $E > 0$ (H : Heaviside-Funktion)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H\left(E - \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) dx\, dp$$

Ankreuzbar: 1a-c, 1d, 1e-f, 2a-c, 3a-b, 3c-e