8. Tutorium - Lösungen **28.11.2014**

- ANMERKUNG: Jeder ist selber für den sinnvollen Umgang mit Lösungszetteln verantwortlich. Letztendlich geht es darum, was man selber lernt und versteht.

8.1 Multiple Choice Fragen

a) $z^3 + z^2 - 2 = (z-1)(z+1+i)(z+1-i)$ hat drei Nullstellen $z = 1, -1 \pm i$. Im Halbkreis C_1 befindet sich eine Nullstelle $z = 1$. Für den Integrationspfad entlang C_1 in der linksdrehenden Richtung :

$$\oint_{C_1} \frac{3z^2 + 2z}{z^3 + z^2 - 2} dz = 2\pi i \left. \frac{3z^2 + 2z}{(z+1+i)(z+1-i)} \right|_{z=1} = 2\pi i$$

b) Im Halbkreis C_2 befinden sich zwei Nullstellen $z = -1 \pm i$. Für den Integrationspfad entlang C_2 in der linksdrehenden Richtung :

$$\oint_{C_2} \frac{3z^2 + 2z}{z^3 + z^2 - 2} dz = 2\pi i \left. \frac{3z^2 + 2z}{(z-1)(z+1-i)} \right|_{z=-1-i} + 2\pi i \left. \frac{3z^2 + 2z}{(z-1)(z+1+i)} \right|_{z=-1+i} = 4\pi i$$

c) Zerlegung des Integrationspfades C_1

$$\oint_{C_1} dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} iRe^{i\phi} d\phi + \int_{iR}^{-iR} dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} iRe^{i\phi} d\phi - \int_{-iR}^{iR} dz$$

Zerlegung des Integrationspfades C_2

$$\oint_{C_2} dz = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} iRe^{i\phi} d\phi + \int_{-iR}^{iR} dz$$

ϕ-Integral (im Limes $R \to \infty$) :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} iRe^{i\phi} d\phi \frac{3R^2 e^{2i\phi} + 2Re^{i\phi}}{R^3 e^{3i\phi} + R^2 e^{2i\phi} - 2} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} iRe^{i\phi} d\phi \frac{3R^2 e^{2i\phi} + 2Re^{i\phi}}{R^3 e^{3i\phi} + R^2 e^{2i\phi} - 2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 3\pi i$$

Integral entlang der Imaginären Achse

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-iR}^{iR} \frac{3z^2 + 2z}{z^3 + z^2 - 2} dz = 3\pi i - \oint_{C_1} \frac{3z^2 + 2z}{z^3 + z^2 - 2} dz = \oint_{C_2} \frac{3z^2 + 2z}{z^3 + z^2 - 2} dz - 3\pi i = \pi i$$

Alternative Lösung : Variablentransformation : $w = z^3 + z^2 - 2 \to dw = (3z^2 + 2z)dz$. Wenn $z = \pm iR$, $w_\pm = \mp iR^3 - R^2 - 2 = \tilde{R} e^{i\phi_\pm}$ wobei $\tilde{R} = |w_\pm|$ und $\phi_\pm = \arg(w_\pm)$.

$$\int_{-iR}^{iR} \frac{3z^2 + 2z}{z^3 + z^2 - 2} dz = \int_\gamma \frac{1}{w} dw = \log w_+ - \log w_- = i(\phi_+ - \phi_-) \xrightarrow[R\to\infty]{} i\pi$$

(Im Limes $R \to \infty$, $\phi_+ \to (3/2)\pi$ and $\phi_- \to (1/2)\pi$. Entlang des Integrationspfades ist die Winkel $\phi = \arg(w)$ monoton steigend und bei $R = 0$ bzw. $w = -2$ kreuzt die Pfad die reelle Achse, $\phi = \pi$ (mod 2π).)

d) Residuensatz :

$$\oint_{C_1} \frac{3z + 2}{z^3 + z^2 - 2} dz = 2\pi i \left. \frac{3z + 2}{(z+1+i)(z+1-i)} \right|_{z=1} = 2\pi i$$

$$\oint_{C_2} \frac{3z + 2}{z^3 + z^2 - 2} dz = 2\pi i \left. \frac{3z + 2}{(z-1)(z+1-i)} \right|_{z=-1-i} + 2\pi i \left. \frac{3z + 2}{(z-1)(z+1+i)} \right|_{z=-1+i} = -2\pi i$$

ϕ-Integral :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} iRe^{i\phi}d\phi \frac{3Re^{i\phi}+2}{R^3e^{3i\phi}+R^2e^{2i\phi}-2} = 0$$

Endergebnis :

$$\int_{-iR}^{iR} \frac{3z+2}{z^3+z^2-2}dz = -\oint_{C_1} \frac{3z+2}{z^3+z^2-2}dz = \oint_{C_2} \frac{3z+2}{z^3+z^2-2}dz = -2\pi i$$

e)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz = \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2-2z}{z^2+4}\right)_{z=-1} = \left.\frac{2z^2+8z-8}{(z^2+4)^2}\right|_{z=-1} = -\frac{14}{25}$$

f)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^2 e^{1/z}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}+\cdots\right)dz = \frac{1}{6}$$

8.2 Maxwell-Gleichungen

a) $\nabla_i E_i = 4\pi\rho, \quad \nabla_i B_i = 0, \quad \varepsilon_{klm}\nabla_l B_m = 4\pi j_k + \frac{\partial}{\partial t}E_k, \quad \varepsilon_{klm}\nabla_l E_m = -\frac{\partial}{\partial t}B_k, \quad f_k = \rho E_k + \varepsilon_{klm} j_l B_m.$

b) $\mathrm{div}\mathbf{j} = \mathrm{div}\left(\frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\right) \rightarrow \nabla_k j_k = \nabla_k\left(\frac{1}{4\pi}\varepsilon_{klm}\nabla_l B_m - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}E_k\right)$

$= \frac{1}{4\pi}\underbrace{\varepsilon_{klm}\nabla_k\nabla_l}_{=0}B_m - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\nabla_k E_k}_{4\pi\rho} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho.$

Also, Kontinuitätsgleichung: $\mathrm{div}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0.$

c) $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \rightarrow \nabla_i B_i = 0. \rightarrow \nabla_i\left(\varepsilon_{ikm}\nabla_k A_m\right) = \underbrace{\varepsilon_{ikm}\nabla_i\nabla_k}_{=0}A_m = 0.$ Ok.

$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \rightarrow \varepsilon_{klm}\nabla_l E_m = -\frac{\partial}{\partial t}B_k \rightarrow \varepsilon_{klm}\nabla_l\left(-\nabla_m\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_m\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_{klm}\nabla_l A_m\right)$

$\rightarrow -\underbrace{\varepsilon_{klm}\nabla_l\nabla_m}_{=0}\phi - \varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial t}\nabla_l A_m = -\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial t}\nabla_l A_m.$ Ok.

8.3 Distributionen und Delta-Folgen

a) Integrationspfad C_1 : oberer Halbkreis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x+i\varepsilon}dx = \oint_{C_1} \frac{e^{iz}}{z+i\varepsilon}dz - iR\int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\phi}}}{Re^{i\phi}+i\varepsilon}e^{i\phi}d\phi = 0$$

Das erste Integral ergibt null weil die Nullstelle $z = -i\varepsilon$ außerhalb C_1 ist. Das zweite verschwindet auch im Limes $R \rightarrow 0$ aber es gilt nur für $\mathrm{Im}(z) > 0$. Der Zähler des Integrands divergiert für $\mathrm{Im}(z) < 0$.
In ähnlicher Weise gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x-i\varepsilon}dx = -\oint_{C_2} \frac{e^{-iz}}{z-i\varepsilon}dz - iR\int_0^{-\pi} \frac{e^{-iRe^{i\phi}}}{Re^{i\phi}-i\varepsilon}e^{i\phi}d\phi = 0$$

wobei der Integrationspfad C_2 der unterer Halbkreis ist.
b) Sokhotsky-Formel :

$$\lim_{\varepsilon\rightarrow 0^+}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x+i\varepsilon}dx = \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx - i\pi\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{ix}dx$$

Weil das Integral der linken Seite null ergibt (Bsp.a),

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx = i\pi\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{ix}dx = i\pi$$

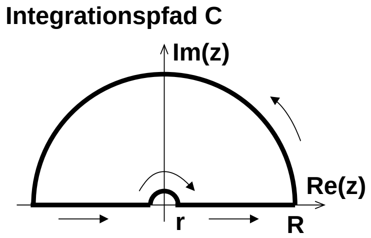
In ähnlicher Weise gilt

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x}dx = -i\pi\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-ix}dx = -i\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = \frac{1}{2i} \left(\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx - \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx \right) = \pi$$

($\sin x/x$ ist analytisch ($\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$).)

Alternative Lösung 1 :



$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx \right]$$

$$= \lim_{R\to\infty, r\to 0^+} \left[\oint_C \frac{e^{iz}}{z + i\varepsilon} dz - \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\phi}}}{Re^{i\phi}} iRe^{i\phi} d\phi - \int_{\pi}^{0} \frac{e^{ire^{i\phi}}}{re^{i\phi}} ire^{i\phi} d\phi \right]$$

$$= 0 - 0 - i \int_{\pi}^{0} d\phi = i\pi$$

Alternative Lösung 2 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x + i\varepsilon} dx}_{=0} - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x + i\varepsilon} dx$$

$$= -\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x + i\varepsilon} dx = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \oint_{C_2} \frac{e^{-ix}}{x + i\varepsilon} dx = \pi \lim_{\varepsilon\to 0^+} e^{-\varepsilon} = \pi$$

c) Folge auf Testfunktion anwenden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\pi x^2} \sin^2(nx)\varphi(x)dx \quad (\text{ Substitution : } \quad u = nx\,, \quad du = ndx)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi u^2} \sin^2(u)\varphi\left(\frac{u}{n}\right) du \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi u^2} \sin^2(u) du = \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin u \cos u}{\pi u} du$$

$$= \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2u)}{\pi(2u)} d(2u) = \varphi(0)$$

d)

$$f(x) = E - \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$f(x)$ hat Zwei Nullstelle wenn $-\sqrt{2mE} < p < \sqrt{2mE}$

$$x_{\pm} = \pm \frac{1}{m\omega} \sqrt{2mE - p^2}$$

Integral :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(E - \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\right) dx\, dp = \int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \left(\frac{1}{|f'(x_+)|} + \frac{1}{|f'(x_-)|} \right) dp$$

$$= \frac{1}{m\omega^2} \int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \left(\frac{1}{|x_+|} + \frac{1}{|x_-|} \right) dp = \frac{2}{\omega} \int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \frac{1}{\sqrt{2mE - p^2}} dp$$

$$\left(\text{Substitution : } p = \sqrt{2mE} \cos\theta \quad \to \quad dp = -\sqrt{2mE} \sin\theta d\theta\right)$$

$$= -\frac{2}{\omega} \int_{\pi}^{0} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\theta}} \sin\theta\, d\theta = \frac{2\pi}{\omega}$$

Alternative Lösung: Variablentransformation : $x = \sqrt{2/m}(R/\omega)\cos\theta$, $p = \sqrt{2m}R \sin\theta$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(E - \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\right) dx\, dp = \frac{2}{\omega} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \delta\left(E - R^2\right) R\, d\theta\, dR = \frac{4\pi}{\omega} \int_0^{\infty} \delta\left(E - R^2\right) R\, dR$$

$$= \frac{4\pi}{\omega} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{E}} \delta\left(\sqrt{E} - R\right) R\, dR = \frac{2\pi}{\omega}$$

e) Variablentransformation : $x = \sqrt{2/m}/\omega X$, $p = \sqrt{2m}Y$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H\left(E - \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right) dx\,dp = \frac{2}{\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H\left(E - X^2 - Y^2\right) dX\,dY = \frac{2\pi E}{\omega}$$

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H\left(E - X^2 - Y^2\right) dX\,dY$ ist die Fäche eines Kreises mit Radius $\sqrt{E}$.
Alternative Lösung : Weil die Ableitung der Heaviside-Funktion die Delta-Funktion ist ($\frac{d}{dx}H(x - x_0) = \delta(x - x_0)$),

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H\left(E - \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right) dx\,dp = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{E} \delta\left(E' - \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right) dE'\,dx\,dp = \int_{0}^{E} \frac{2\pi}{\omega}dE' = \frac{2\pi E}{\omega}$$