9. Tutorium **für 12.12.2014**

9.1 Multiple Choice Fragen

Berechne die Integrale
a)

$$\int d^3r\delta\left(R-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

b)

$$\int d^3r H(R^2-x^2-y^2-z^2)$$

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(4x^3-y^3-4xy+x)H(x^2-y^2+2x-1)\delta(x-y)f(x,y)dx\,dy$$

d) Vereinfache die folgende Funktion

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\gamma\frac{d}{dt}\right)H(t)\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}.$$

e) Betrachte eine verallgemeinerte Funktion

$$f(x)=\begin{cases}\cos(\pi x) & (-1\le x\le 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}.$$

Forme das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)g(x)dx$$

für analytische Funktionen $g(x)$ um.
f) Berechne die erste Derivierte der verallgemeinerten Funktion im Bsp. e.

9.2 Delta-Distribution

a) Berechne $\nabla^2(1/r)$ für $r>0$.
b) Berechne das Integral im Limes $\varepsilon\to 0$

$$\int_{V_\varepsilon}d^3r\,\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)\varphi(\vec{r})\right]$$

für analytische Funktionen $\varphi(\vec{r})$. Der Integrationsbereich V_ε ist eine Kugel mit Radius ε und Zentrum $\vec{r}=0$. (Hinweis : Gaußscher Integralsatz)
c) Zeige $-(4\pi)^{-1}\nabla^2(1/r)=\delta^3(\vec{r})$ durch Anwenden auf eine Testfunktion.
d) Zeige $\delta^3(\vec{r}-\vec{q})=1/(q^2\sin\theta_q)\delta(r-q)\delta(\theta-\theta_q)\delta(\phi-\phi_q)$. ($(r,\theta,\phi)$ ist die Kugelkoordinaten, d.h., $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$.)

9.3 Greensche Funktion

a) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2 + \gamma^2\right) y(t) = f(t)\,.$$

Finde die Greensche Funktion $G(t,t')$, die die Randbedingungen

$$G(0,t' > 0) = 0\,, \quad \text{und} \quad G'(0,t' > 0) = 0$$

erfüllt ($G'(t,t') = \frac{d}{dt}G(t,t')$).

b) Löse die Differentialgleichung mit $f(t) = F_0 e^{i\Omega t}$ auf $t \geq 0$ unter den Randbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ mit Hilfe der Greenschen Funktion.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2ab, 2cd, 3a, 3b