9. Tutorium - Lösungen **12.12.2014**

- ANMERKUNG: Jeder ist selber für den sinnvollen Umgang mit Lösungszetteln verantwortlich. Letztendlich geht es darum, was man selber lernt und versteht.

9.1 Multiple Choice Fragen

a) Variablentransformation : $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$:

$$\int d^3r\delta\left(R-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \int_0^\infty dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\, r^2\sin\theta\,\delta\left(R-r\right) = 4\pi\int_0^\infty dr\, r^2\delta\left(R-r\right) = 4\pi R^2$$

b)

$$I = \int d^3r H(R^2-x^2-y^2-z^2)$$

$$\frac{dI}{dR} = \int d^3r\, 2R\,\delta(R^2-x^2-y^2-z^2) = 2R\int_0^\infty dr\, 4\pi r^2\sin\theta\,\delta(R^2-r^2) = \int_0^\infty dr\, 4\pi r^2\sin\theta\,\delta(R-r) = 4\pi R^2$$

$$I = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{(Volumen der Kugel mit Radius } R\text{)}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(4x^3-y^3-4xy+x)H(x^2-y^2+2x-1)\delta(x-y)f(x,y)dx\,dy\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(3x^3-4x^2+x)H(2x-1)f(x,x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x(3x-1)(x-1)\right)H(2x-1)f(x,x)dx\\
&= \frac{1}{|9x^2-8x+1|}H(2x-1)f(x,x)\Big|_{x=0} + \frac{1}{|9x^2-8x+1|}H(2x-1)f(x,x)\Big|_{x=1/3}\\
&+ \frac{1}{|9x^2-8x+1|}H(2x-1)f(x,x)\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}f(1,1)
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2}{dt^2}+\gamma\frac{d}{dt}\right)H(t)\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma} &= \left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)\Big(\underbrace{\delta(t)\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}}_{=0}+H(t)e^{-\gamma t}\Big)\\
&= \delta(t)e^{-\gamma t}-\gamma H(t)e^{-\gamma t}+\gamma H(t)e^{-\gamma t} = \delta(t)e^{-\gamma t} = \delta(t)
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx = -\int_{-1}^{1}\cos(\pi x)g'(x)dx\\
= &-\cos(\pi x)g(x)|_{x=-1}^{1} - \pi\int_{-1}^{1}\sin(\pi x)\,g(x)dx = -\pi\int_{-1}^{1}\sin(\pi x)\,g(x)dx + g(1)-g(-1)
\end{aligned}$$

f) $f(x) = \cos(\pi x)H(1-x)H(1+x)$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\pi\sin(\pi x)H(1-x)H(1+x)-\cos(\pi x)\delta(1-x)H(1+x)+\cos(\pi x)H(1-x)\delta(1+x)\\
&= -\pi\sin(\pi x)H(1-x)H(1+x)+\delta(x-1)-\delta(x+1)
\end{aligned}$$

9.2 Delta-Distribution

a)

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \partial_i \partial_i \frac{1}{r} = -\partial_i \frac{x_i}{r^3} = -\frac{\delta_{ii}}{r^3} + \frac{3x_i x_i}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = 0$$

b)

$$\int_{V_\varepsilon} \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \varphi(\vec{r}) \right] d^3 r \overset{\substack{\text{Gaußscher} \\ \text{Integralsatz}}}{=} \int_{S_\varepsilon} \left[\left(\vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \varphi(\vec{r}) \right]_{r=\varepsilon} \cdot \vec{e}_r \, dS \quad \begin{pmatrix} S_\varepsilon : \text{Oberfläche der Kugel } V_\varepsilon \\ dS = \varepsilon^2 d\Omega \end{pmatrix}$$

$$= \int \left(-\vec{e}_r \frac{\varphi(\vec{r})}{r^2} \right)_{r=\varepsilon} \cdot \vec{e}_r \, \varepsilon^2 \, d\Omega = -\int \varphi(\vec{r})|_{r=\varepsilon} \, d\Omega \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} -4\pi \varphi(0)$$

c) V_c : das Volumen außerhalb der Kugel V_ε (d.h., $r > \varepsilon$)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \int d^3 r \left(\nabla^2 \frac{1}{r} \right) \varphi(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\varepsilon} d^3 r \left(\nabla^2 \frac{1}{r} \right) \varphi(\vec{r}) - \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{V_c} d^3 r \left(\nabla^2 \frac{1}{r} \right) \varphi(\vec{r})}_{=0} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\varepsilon} d^3 r \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \varphi(\vec{r}) \right] + \frac{1}{4\pi} \int_{V_\varepsilon} d^3 r \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \left(\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right) \end{aligned}$$

Das zweite Integral verschwindet im Limes $\varepsilon \to 0$ für analytische Funktionen $\varphi(\vec{r})$,

$$\int_{V_\varepsilon} d^3 r \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \left(\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right) = -\int_{V_\varepsilon} d^3 r \, \vec{e}_r \frac{1}{r^2} \left(\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right) = -\int_0^\varepsilon dr \int d\Omega \, \vec{e}_r \left(\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Aus dem Ergebnis von Bsp.b

$$-\frac{1}{4\pi} \int d^3 r \left(\nabla^2 \frac{1}{r} \right) \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\varepsilon} d^3 r \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \varphi(\vec{r}) \right] = \varphi(0) \, .$$

Deshalb ist $-\nabla^2 1/(4\pi r)$ eine dreidimensionale Delta-Distribution. Oder $-1/(4\pi r)$ ist die Greensche Funktion des Laplace-Operators.

d)

$$\varphi(\vec{r}) = \int_0^\infty dq \int_0^\pi d\theta_q \int_0^{2\pi} d\phi_q \, \delta(r-q) \delta(\theta - \theta_q) \delta(\phi - \phi_q) \varphi(\vec{q}) = \int d^3 q \, \delta^3(\vec{r} - \vec{q}) \varphi(\vec{q})$$

Variablentransformation $d^3 q = q^2 \sin\theta_q dq d\theta_q d\phi_q$ im zweiten Integral

$$\int d^3 q \, \delta^3(\vec{r} - \vec{q}) \varphi(\vec{q}) = \int_0^\infty dq \int_0^\pi d\theta_q \int_0^{2\pi} d\phi_q \, q^2 \sin\theta_q \delta^3(\vec{r} - \vec{q}) \varphi(\vec{q})$$

Vergleich zwischen dem ersten und dem letzten Integral :

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{q}) = \frac{1}{q^2 \sin\theta_q} \delta(r-q) \delta(\theta - \theta_q) \delta(\phi - \phi_q)$$

9.3 Greensche Funktion

a)Differentialoperator :

$$\mathcal{L}_t = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 + \gamma^2 \right)$$

Greensche Funktion erfüllt die Gleichung $\mathcal{L}_t G_I(t,t') = \delta(t-t')$. Mit dem Einsetzen des Ansatzes $G_I(t,t') = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^\infty \tilde{G}_I(\omega) \, e^{i\omega(t-t')} d\omega$ wird die Gleichung zu

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2 + \gamma^2) \tilde{G}_I(\omega) \, e^{i\omega(t-t')} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega(t-t')} d\omega$$

Vergleich der Integranden

$$\tilde{G}_I(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 - 2i\gamma\omega - \omega_0^2 - \gamma^2}$$

Fourier-Transformation

$$G_I(t,t') = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega^2 - 2i\gamma\omega - \omega_0^2 - \gamma^2} d\omega = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega-\lambda)(\omega+\lambda^*)} d\omega$$

wobei $\lambda = \omega_0 + i\gamma$ ($\lambda^* = \omega_0 - i\gamma$). Zwei Pole liegen in der oberen Halbebene der komplexen Zahlen und kein Pol liegt in der unteren Halbebene. Mit Hilfe des Residuensatzes (Integrationspfad : oberer Halbkreis für $t > t'$ und unterer Halbkreis für $t < t'$) ergibt sich

$$\begin{aligned}
G_I(t,t') &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega-\lambda)(\omega+\lambda^*)} d\omega = -H(t-t')i\left[\mathrm{Res}_{\omega\to\lambda}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega-\lambda)(\omega+\lambda^*)} + \mathrm{Res}_{\omega\to-\lambda^*}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega-\lambda)(\omega+\lambda^*)}\right] \\
&= -H(t-t')i\left[\frac{e^{i\omega_0(t-t')}e^{-\gamma(t-t')}}{2\omega_0} - \frac{e^{-i\omega_0(t-t')}e^{-\gamma(t-t')}}{2\omega_0}\right] \\
&= H(t-t')\frac{e^{-\gamma(t-t')}}{\omega_0}\frac{e^{i\omega_0(t-t')} - e^{-i\omega_0(t-t')}}{2i} = H(t-t')\frac{e^{-\gamma(t-t')}}{\omega_0}\sin\left(\omega_0(t-t')\right) .
\end{aligned}$$

Für $t' > 0$.

$$G_I(0,t') = -H(-t')\frac{e^{\gamma t'}}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 t'\right) = 0$$

$$G_I'(0,t') = -\delta(-t')\frac{e^{\gamma t'}}{\omega_0}\sin(\omega_0 t') + \gamma H(-t')\frac{e^{\gamma t'}}{\omega_0}\sin(\omega_0 t') + H(-t')e^{\gamma t'}\cos(\omega_0 t') = 0$$

Die Lösung $G_I(t,t')$ erfüllt die Randbedingungen.
b)

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^{\infty} G(t,t')F_0 e^{i\Omega t'}dt' = \int_0^{\infty} H(t-t')\frac{e^{-\gamma(t-t')}}{\omega_0}\sin\left(\omega_0(t-t')\right)F_0 e^{i\Omega t'}dt' \\
&= \int_0^{t} \frac{e^{-\gamma(t-t')}}{\omega_0}\sin\left(\omega_0(t-t')\right)F_0 e^{i\Omega t'}dt' = \frac{F_0}{\omega_0}e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma t'}\frac{e^{i\omega_0(t-t')} - e^{-i\omega_0(t-t')}}{2i}e^{i\Omega t'}dt' \\
&= \frac{F_0}{2i\omega_0}e^{-\gamma t}\int_0^t \left[e^{i\omega_0 t}e^{(\gamma - i\omega_0 + i\Omega)t'} - e^{-i\omega_0 t}e^{(\gamma + i\omega_0 + i\Omega)t'}\right]dt' \\
&= -i\frac{F_0}{2\omega_0}e^{-\gamma t}\left[\frac{e^{(\gamma+i\Omega)t} - e^{i\omega_0 t}}{\gamma - i\omega_0 + i\Omega} - \frac{e^{(\gamma+i\Omega)t} - e^{-i\omega_0 t}}{\gamma + i\omega_0 + i\Omega}\right] = -i\frac{F_0}{2\omega_0}\left[\frac{e^{i\Omega t} - e^{-\gamma t + i\omega_0 t}}{\gamma - i\omega_0 + i\Omega} - \frac{e^{i\Omega t} - e^{-\gamma t - i\omega_0 t}}{\gamma + i\omega_0 + i\Omega}\right]
\end{aligned}$$

Randbedingungen : $y(0) = 0$

$$y'(0) = -i\frac{F_0}{2\omega_0}\left[\frac{i\Omega + \gamma - i\omega_0}{\gamma - i\omega_0 + i\Omega} - \frac{i\Omega + \gamma + i\omega_0}{\gamma + i\omega_0 + i\Omega}\right] = 0$$