

Name: _____ Tutoriumsgruppe: _____ Matr. Nr.: _____
Anzahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt und Multiple Choice Antwortbogen): _____

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

1. Test, 4. 12. 2015, 2015W

1 Spektraltheorem (30 Punkte)

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & R \\ R & 0 \end{pmatrix}$$

und überprüfen Sie die Orthogonalität der Eigenvektoren.

b) Berechnen Sie

$$e^{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2 Lokale Transformation (40 Punkte)

Betrachten Sie eine infinitesimale Änderung $d\mathbf{x} = dx^i \mathbf{e}_i$ des Vektors $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ wobei \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 die kartesischen Basisvektoren sind.

a) Mit den Polarkoordinaten $(x^1, x^2) = (r, \theta)$ und der entsprechenden Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ wird die infinitesimale Änderung in die Form $d\mathbf{x} = dx'^i \mathbf{e}'_i$ umgeschrieben. Berechnen Sie die Transformationsmatrix \mathbf{T} zwischen den Basisvektoren ($(\mathbf{e}'_1 \ \mathbf{e}'_2) = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2) \mathbf{T}$). Die Polarkoordinaten sind durch $(x^1, x^2) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ definiert.

b) Berechnen Sie den metrischen Tensor \mathbf{g} und seine Inverse \mathbf{g}^{-1} für die Polarkoordinaten.

c) Berechnen Sie die Länge der Kurve $C : (x = r(t) \cos \theta(t), y = r(t) \sin \theta(t))$ wobei $r(t) = a \sin^2(\pi t/T)$ und $\theta(t) = 2\pi t/T$ mit $0 \leq t \leq T$ (a und T sind positive Konstanten).

BITTE WENDEN

3 Multiple Choice Fragen - Gruppe B (30 Punkte)

(3 Punkte pro Frage)

Überprüfen Sie, ob die richtige Gruppe auf dem Antwortbogen angekreuzt ist!

A B C D E F

1) Berechnen Sie das Flächenintegral $\int_F \text{rot} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{A}$ für $\mathbf{b} = (x, 0, y)$ und $F = \{(x, y, z) | x = 0, y^2 + z^2 < a^2\}$.

- a) anders b) πa^2 c) $2\pi a$ d) 1 e) 0

2) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\oint_D \mathbf{b} \cdot d\mathbf{s}$ für $\mathbf{b} = (0, z, y)$ und $D = \{(x, y, z) | x = 0, y^2 + z^2 = a^2\}$.

- a) 0 b) anders c) 1 d) $2\pi a$ e) πa^2

Berechnen Sie für einen 3-dimensionalen Raum:

3) $\delta^i_i \delta^j_j + \delta^i_j \delta^j_i$

- a) anders b) 12 c) 3 d) 6 e) 18

4) $g^{ij} g_{ji}$

- a) 2 b) 3 c) 0 d) 1 e) anders

5) Formen Sie für die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , und \mathbf{C} den Kommutator $[\mathbf{A}, \mathbf{BC}]$ um.

- a) anders b) $[\mathbf{AB}, \mathbf{C}]$ c) $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$
d) $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} - \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ e) $[\mathbf{BC}, \mathbf{A}]$

Berechnen Sie für C : ($|z| = 1$) in der komplexen Ebene:

6) $\oint_C \frac{z}{2z-1} dz$

- a) anders b) πi c) $(1/2)\pi i$ d) 0 e) $2\pi i$

7) $\oint_C \frac{z+1}{z(z+3)} dz$

- a) $1/3$ b) 0 c) anders d) $(4/3)\pi i$ e) $-(4/3)\pi i$

8) Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z+1}{(z-i)(z+1-i)(z+1+i)} dz$

- a) anders b) $\pi(4+7i)/5$ c) $-\pi(2+i)/5$ d) $2\pi/(2i-4)$ e) $\pi(2+i)/5$

Berechnen Sie für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik:

9) $\text{grad}|\mathbf{x}|^2$

- a) anders b) $2\mathbf{x}$ c) $2|\mathbf{x}|$ d) \mathbf{x} e) 0

10) $\text{grad}|\mathbf{x}|$

- a) $2|\mathbf{x}|$ b) anders c) $2\sqrt{|\mathbf{x}|}$ d) $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ e) $2\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$
-