10. Tutorium **für 15.1.2016**

10.1 Multiple Choice Fragen

a) $\left|\left(ix-\frac{1}{2}\right)!\right|^2 =?$ (x: reell)
b) $\left|e^{-\pi\gamma/2}\Gamma\left(1+i\gamma\right)\right|^2 =?$ (γ: reell)
c) $\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) =?$ (n: Ganzzahl)
d) $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2a}e^{-x^2}dx =?$ (a: reell)
e) $-\int_0^1 x^a \ln x\, dx =?$ (a: reell)
f) $\int_0^\infty e^{-x^4}dx =?$

Hinweise:
$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, $z! = \Gamma(z+1)$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin(\pi z)$, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$,
$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$,

10.2 Greensche Funktion

Die Greensche Funktion $G(t,t')$ des Differentialoperators

$$\mathcal{L} = \left(\frac{d}{dt}-iE_1\right)\left(\frac{d}{dt}-iE_2\right)$$

(E_1, E_2 : reell) kann als den Grenzwert $G(t,t') = \lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(t,t')$ berechnet werden. Hier ist $G_\varepsilon(t,t')$ die Greensche Funktion des Differentialoperators

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \left(\frac{d}{dt}-i(E_1+i\varepsilon)\right)\left(\frac{d}{dt}-i(E_2+i\varepsilon)\right).$$

a) Für $\varepsilon > 0$ berechne die Greensche Funktion $G^+(t,t') = \lim_{\varepsilon\to 0^+} G_\varepsilon(t,t')$, die die Randbedingungen, $G^+(0,t'>0)=0$ und $G^{+\prime}(0,t'>0)=0$, erfüllt.
b) Für $\varepsilon < 0$ berechne die Greensche Funktion $G^-(t,t') = \lim_{\varepsilon\to 0^-} G_\varepsilon(t,t')$, die die Randbedingungen, $G^-(0,t'>0)=0$ und $G^{-\prime}(0,t'>0)=0$, erfüllt.

10.3 Separationsansatz der Kugelkoordinaten

Gegeben sei eine Differentialgleichung $\nabla^2\psi(\mathbf{x})=0$. Finde den Separationsansatz der Kugelkoordinaten $(x^1,x^2,x^3)=(r,\theta,\phi)$ mit den folgenden Schritten. Eine infinitesimale Änderung ist durch $\mathbf{dx} = dx^i\mathbf{e}_i$ gegeben (die Basis ist orthogonal aber nicht normiert).

a) Zeige $\nabla x^i = (1/g_{ii})\mathbf{e}_i$ (ohne Summe über i) wobei g_{ij} ein Element des metrischen Tensors ist.
b) Zeige $\nabla\left(\frac{1}{G}\mathbf{e}_1\right) = \nabla\left(\frac{1}{G}\mathbf{e}_2\right) = \nabla\left(\frac{1}{G}\mathbf{e}_3\right) = 0$ wobei $G = \sqrt{g_{11}\, g_{22}\, g_{33}}$.
Hinweis : Bestimme zuerst den Koeffizient a in, z.B., $\mathbf{e}_1 = a\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ und verwende die Identitäten $\nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ und $\nabla \times (\nabla b) = 0$.
c) Zeige für $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{1}{G}\partial_i \left(G v^i\right) .$$

d) Zeige

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^2}\partial_r \left(r^2 \partial_r \psi(\mathbf{x})\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_\theta \left(\sin\theta \partial_\theta \psi(\mathbf{x})\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\partial_\phi^2 \psi(\mathbf{x}) .$$

Der metrische Tensor der Kugelkoordinaten ist $\mathbf{g} = \mathrm{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2\theta)$ (siehe Bsp.6.2).
e) Führe den Separationsansatz der Differentialgleichung $\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) = 0$ durch und schreibe die Differentialgleichungen der r-, θ- und ϕ-Koordinaten an.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2ab, 3ab, 3cd, 3e

Ein kurzer Ausblick auf zukünftige Semester: In allen Fächern der Physik werden viele Phänomene von Differentialgleichungen beschrieben. Die Eigenschaften der Differentialgleichungen werden im Rahmen des Sturm-Liouville-Problems, und des Separationsansatzes analysiert und die Greensche Funktion ist eine praktische Methode, um die Lösungen zu finden. Das Eigenwertproblem taucht oft insbesondere in der Quantentheorie (5. Sem) auf. Legendre-Polynome, Delta Distribution, Heaviside Funktion und andere spezielle Funktionen werden in Elektrodynamik (4. Semester) und Quantentheorie wiederkehren. Sie sind wichtige Grundlagen auch für numerische Rechnungen (wie z.B Gauß-Quadratur). Ko- und kontravariante Schreibweise werden in Elektrodynamik I & II für die spezielle Relativitätstheorie gebraucht. Die duale Basis erscheint in Form des reziproken Gitters in der Festkörperphysik (6. Sem). Die Gamma-Funktion wird in Statistischer Physik (6. Sem) eine wichtige Rolle spielen. Somit sollten die "Mathematischen Methoden" eine wichtige Grundlage für künftige theoretische Vorlesungen bieten.