1. Tutorium - Lösungen **16.10.2015**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

1.1 Multiple Choice Fragen

a) $\int_0^\pi x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x|_0^\pi - 2\int_0^\pi x \sin x\, dx = 2x\cos x|_0^\pi - 2\int_0^\pi \cos x\, dx = -2\pi$
b) $t = \sin x \to dt = \cos x\, dx$
$\int \sin^2 x \cos x\, dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$ (gilt für beliebige Konstante C). Der Fall $C = 0$ ist eine der Lösungen.
Anmerkung: Unbestimmtes Integral $\int f(x)dx = F(x) + C$ definiert eine Function mit einer "unbestimmten" Konstante C. Es ist nicht eine Familie der Funktionen, d.h. $\int f(x)dx \neq \mathfrak{F} = \{F(x) + C | C \in \mathbb{C}\}$.
c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^3+x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{(x+1)^2} = 1$
d) $\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \cdots\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{3!x^2} + \cdots\right) = 1$
e) $\frac{d}{dx}\cos(2x) = -2\sin(2x) = -4\sin x \cos x$
f) $\frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\cos x} = \frac{\tan^2 x}{\sin x}$

1.2 Fourier-Transformation

Fourier-Transformation : $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$
$\to$ Inverse Fourier-Transformation : $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$
$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} i\omega F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \to i\omega F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)e^{-i\omega t}dt$
$i\omega F(\omega)$ ist die Fourier-Transformation von $\frac{d}{dt}f(t)$.
$\frac{d^2}{dt^2}f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-\omega^2)F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \to -\omega^2 F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right)e^{-i\omega t}dt$
$-\omega^2 F(\omega)$ ist die Fourier-Transformation von $\frac{d^2}{dt^2}f(t)$.
Alternative Lösung :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)e^{-i\omega t}dt = \underbrace{\left.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(t)e^{-i\omega t}\right|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + i\omega\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = i\omega F(\omega)$$

($|F(\omega)| < +\infty \to f(t)$ ist eine integriebare Funktion $\to \lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right)e^{-i\omega t}dt = \underbrace{\left.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)e^{-i\omega t}\right|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + i\omega\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)e^{-i\omega t}dt = -\omega^2 F(\omega)$$

1.3 Vektoren

a) $\mathbf{x} = \frac{1}{2}((\mathbf{x}+\mathbf{y}) + (\mathbf{x}-\mathbf{y})) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$

$\mathbf{y} = \frac{1}{2}((\mathbf{x}+\mathbf{y}) - (\mathbf{x}-\mathbf{y})) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}.$

b) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{z} = |x|^2 + \beta\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0 \to \beta = -\frac{|x|^2}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} = -\frac{3}{4}$, $\quad \mathbf{z} = \mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ -5/4 \end{pmatrix}$.

1.4 Aktive und passive Drehung

a) Rotationsmatrix $R(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$.

$\mathbf{r}_e(t) = R(\omega t)\,\mathbf{r}_e(t=0) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_e \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_e\cos(\omega t) \\ r_e\sin(\omega t) \end{pmatrix}$.

b)

$\mathbf{e}_1' = R(\omega t)\,\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$

$\mathbf{e}_2' = R(\omega t)\,\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$

c) $T(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$

R und T sind inverse zueinander. (Sie sind auch transponiert zueinander).

$\mathbf{r}_e'(t) = T(\omega t)\,\mathbf{r}_e(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_e\cos(\omega t) \\ r_e\sin(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_e \\ 0 \end{pmatrix}$.

In der Vektordarstellung werden oft nur die Koeffizienten bezeichnet und muss man beachten was die Basisvektoren sind.

$\mathbf{r}_e(t) = \underbrace{r_e\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_1 + r_e\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_2}_{\mathbf{r}_e(t)=\begin{pmatrix} r_e\sin(\omega t) \\ r_e\cos(\omega t) \end{pmatrix}} = \underbrace{r_e\,\mathbf{e}_1' + 0\,\mathbf{e}_2'}_{\mathbf{r}_e'(t)=\begin{pmatrix} r_e \\ 0 \end{pmatrix}}$

d) $\mathbf{r}_m(t) = r_e\,\mathbf{e}_1' + r_m\cos(\omega_m t)\,\mathbf{e}_1' + r_m\sin(\omega_m t)\,\mathbf{e}_2'$

In der rotierenden Basis, $\mathbf{r}_m'(t) = \begin{pmatrix} r_e + r_m\cos(\omega_m t) \\ r_m\sin(\omega_m t) \end{pmatrix}$.

Im Inertialsystem

$\mathbf{r}_m(t) = R(\omega t)\,\mathbf{r}_m'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_e + r_m\cos(\omega_m t) \\ r_m\sin(\omega_m t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_e\cos(\omega t) + r_m\cos((\omega+\omega_m)t) \\ r_e\sin(\omega t) + r_m\sin((\omega+\omega_m)t) \end{pmatrix}$