2. Tutorium **für 23.10.2015**

Änderung in der Abgabefrist der Kreuzerlliste: Freitag **8:00 Uhr** ist die neue Abgabefrist. Eine Änderung der Kreuze nach 8:00 Uhr ist nicht mehr möglich.

2.1 Multiple Choice Fragen

a) Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne mit der Einsteinschen Summenkonvention $a_i b_i$.

b) Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Berechne a_{ii}.

c) Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Berechne $(a_{ij} b_{ik})$.

d) Schreibe in Indexschreibweise $(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T)_{ij}$ (für allgemeine Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.)

e) Schreibe in Matrixform $a_{lj} b_{ik} c_{lk}$.

f) Schreibe in Matrixform $a_{ik} b_{ml} c_{im} d_{kl}$.

2.2 Lineare Unabhängigkeit

Gegeben sei, dass die Familie $\mathfrak{S} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ von Vektoren einen Vektorraum $\mathfrak{V}$ aufspannt (d.h.$\mathfrak{V} = \mathrm{span}(\mathfrak{S})$) .

a) Prüfe ob jede der folgenden Familien $\mathfrak{S} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ linear abhängig oder unabhängig ist.

(i)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Zeige $\mathbf{x}_3 \in \mathrm{span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ falls eine (oder beide) Familie(n) aus Bsp.a linear abhängig ist (sind).

Beantworte die folgenden Fragen c und d für die linear unabhängige(n) Familie(n) in Bsp.a.
c) Zeige $\mathfrak{V} = \mathrm{span}(\mathfrak{S}')$ für die Familie $\mathfrak{S}' = \{\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3\} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\}$.
d) Zeige die lineare Unabhängigkeit der Familie $\mathfrak{S}'$.

2.3 Duale Basis

$\mathfrak{S} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ist eine Orthonormalbasis des Vektorraums $\mathfrak{V}$. Ein Vektor $\mathbf{x}$ wird in der Basis mit $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \mathbf{E} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ (oder einfach $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$) dargestellt. $\mathfrak{B} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ ist linear unabhängig eine nicht-orthogonale Basis des Vektorraums. Ein Vektor $\mathbf{x}$ wird in der Basis mit $\mathbf{x} = x'^i \mathbf{f}_i = (\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2) \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}$ dargestellt.
a) Schreibe die Transformationsmatrix T zwischen den zwei Darstellungen (d.h. $\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$) an.
b) Berechne x'^1 und x'^2 für $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
c)Die duale Basis $\mathfrak{B}^* = \{\mathbf{f}^*_1, \mathbf{f}^*_2\} := \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ im dualen Vektorraum wird über $\mathbf{f}^*_i \cdot \mathbf{f}_j = \delta_{ij}$ bzw. $\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \delta^i_j$ definiert. Zeige, dass die Matrix $\mathbf{F}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix}$ die inverse Matrix von $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1\ \ \mathbf{f}_2)$ ist.
d) Schreibe die dualen Basisvektoren $\mathbf{f}^1$ und $\mathbf{f}^2$ an und berechne die Koordinaten x'_1 und x'_2 in der dualen Basis für den Vektor $\mathbf{x}$ aus Bsp.b. ($\mathbf{x}^T = x'_i \mathbf{f}^i = (x'_1\ x'_2) \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = (x'_1\ x'_2)\, \mathbf{F}^*$)
e) Berechne das Skalarprodukt $x'_i x'^i$ in der dualen Basis.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2ab, 2cd, 3ab, 3c-e