2. Tutorium - Lösungen **23.10.2015**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel zu rechnen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

2.1 Multiple Choice Fragen

a) $a_i b_i = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$

b) $a_{ii} = \sum_{i=3} a_{ii} = 1 + 2 + 3 = 6$

c) $a_{ij} b_{ik} = (A)_{ij} (B)_{ik} = \left(A^T\right)_{ji} (B)_{ik} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T)_{ij} = (\mathbf{A}^T)_{ik} (\mathbf{B}^T)_{kj} = a_{ki} b_{jk}$

e) $a_{lj} b_{ik} c_{lk} = b_{ik} c_{lk} a_{lj} = (B)_{ik} (C^T)_{kl} (A)_{lj} = (BC^T A)_{ij} = (A^T C B^T)_{ji}$

f) $a_{ik} b_{ml} c_{im} d_{kl} = a_{ik} d_{kl} b_{ml} c_{im} = (A)_{ik} (D)_{kl} (B^T)_{lm} (C^T)_{mi} = (ADB^T C^T)_{ii} = \mathrm{Spur}(ADB^T C^T) = \mathrm{Spur}(B^T C^T AD) = \mathrm{Spur}(D^T A^T C B)$

2.2 Lineare Unabhängigkeit

a) Wenn $a^i \mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = 0$ eine einzige Lösung $a^i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ hat, ist die Familie $\mathfrak{S} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ von Vektoren linear unabhängig. Die Bedingung für lineare Unabhängigkeit ist deshalb die Existenz der inversen Matrix $\mathbf{X}^{-1}$ (wobei $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3)$), d.h. $\det X \neq 0$.

(i) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 2 + 0 - (1 - 1 + 0) = 0 \to$ linear abhängig

(ii) $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 - (8 + 1 + 0) = -9 \to$ linear unabhängig

b) Für den Fall (i):

$\mathbf{x}_3 = \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{pmatrix} \to (\alpha, \beta) = (1, -1) \to \mathbf{x}_3 \in \mathrm{span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

c) Für den Fall (ii):

Für beliebiges (α, β, γ), $\alpha \mathbf{x}'_1 + \beta \mathbf{x}'_2 + \gamma \mathbf{x}'_3 = \alpha \mathbf{x}_1 + \beta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \gamma(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = (\alpha - \beta - \gamma)\mathbf{x}_1 + (\beta - \gamma)\mathbf{x}_2 + \gamma \mathbf{x}_3$
$\to$ Alle Linearkombination von $\mathfrak{S}'$ sind im Vektorraum $\mathfrak{V}$. In gleicher Weise sind alle Linearkombination von $\mathfrak{S}$ im Vektorraum $\mathrm{span}(\mathfrak{S}')$. $\to \mathfrak{V} = \mathrm{span}(\mathfrak{S}')$

d) Wegen der linearen Unabhängigkeit der Familien $\mathfrak{S}$, ist $\alpha - \beta - \gamma = \beta - \gamma = \gamma = 0$ (oder $\alpha = \beta = \gamma = 0$) die einzige Lösung für $\alpha \mathbf{x}'_1 + \beta \mathbf{x}'_2 + \gamma \mathbf{x}'_3 = 0 \to \mathfrak{S}'$ ist linear unabhängig.

Alternative Lösung :

$$\det \mathbf{X}' = \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = -9 \neq 0\,.$$

2.3 Duale Basis

a) $\mathbf{x} = \mathbf{E}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \mathbf{F}\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}$. Weil $\mathfrak{B}$ linear unabhängig ist, $\det \mathbf{F} \neq 0$ und die inverse Matrix $\mathbf{F}^{-1}$ existiert.

$\rightarrow \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{E}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$. $\rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{E}$

b) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{F}^*\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix}(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1\cdot\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}^1\cdot\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}^2\cdot\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}^2\cdot\mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{F}^{*\,-1} = \mathbf{F}$ (oder $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^*$)

d) $\mathbf{F}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{f}^1 = \frac{1}{7}(3\ 1) \quad \mathbf{f}^2 = \frac{1}{7}(-1\ 2)$

$(x'_1\ x'_2) = (1\ 1)\mathbf{F}^{*\,-1} = (1\ 1)\mathbf{F} = (3\ 2)$

e) $x'_i x'^i = \frac{1}{7}(12+2) = 2 (= x_i x^i)$

Anmerkungen:

Zur Vereifachung wurde alle Matrizen im dualen Raum ohne Transposition geschrieben. Die genauere Definition ist gegeben durch $\mathbf{F}^* = \left((\mathbf{f}^1)^T \quad (\mathbf{f}^2)^T\right)$, $\mathbf{E}^* = \left((\mathbf{e}^1)^T \quad (\mathbf{e}^2)^T\right)$ und $\mathbf{E}^* = \mathbf{F}^*(\mathbf{T}^{-1})^T$. Die inverse Matrizen sind $\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{F}^*)^T$ und $\mathbf{E}^{-1} = (\mathbf{E}^*)^T$.

Im Allgemeinen $(x'_1\ x'_2) = \mathbf{x}^T(\mathbf{F}^{*\,T})^{-1} = (x_1\ x_2)\,\mathbf{F} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{f}_2) \rightarrow \mathbf{x}^T = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{f}_i)\,\mathbf{f}^i$

In gleicher Weise $\mathbf{x} = \mathbf{f}_i\,(\mathbf{x}\cdot\mathbf{f}^i)$

Skalarprodukt : $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = ({f^j}_i x_j)\,\mathbf{f}^i\ \ ({f_k}^\ell x^k)\mathbf{f}_\ell = ({f^j}_i x_j)\,({f_k}^\ell x^k){\delta^i}_\ell = ({f^j}_i x_j)\,({f_k}^i x^k) = x'_i\,x'^i = x_i\,x^i$

(wobei $\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i\,(\mathbf{e}^i\mathbf{f}_j) = \mathbf{e}_i {f^i}_j$ und $\mathbf{f}^j = (\mathbf{f}^j\mathbf{e}_i)\,\mathbf{e}^i = {f_i}^j\mathbf{e}^i \rightarrow {f^j}_i {f_k}^i = {\delta^j}_k$)