3. Tutorium **für 30.10.2015**

Die Beispiele sind in TUWEL bis Freitag, 8:00Uhr, anzukreuzen!

3.1 Multiple Choice Fragen

a) Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne $\varepsilon_{2jk} a_j b_k$, wobei ε_{ijk} das Levi-Civita-Symbol ist.
b) Gegeben sei eine 3×3 Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Schreibe mit der Hilfe des Levi-Civita-Symbols die Determinante $\det\mathbf{A}$.
c) Berechne für $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ den Ausdruck $\partial_i(x_i x_j x_j)$ in d Dimensionen.
d) Berechne den Ausdruck $\partial_i \sqrt{x_j x_j}$.
e) Berechne den Kommutator der Pauli-Matrizen $[\sigma_1, \sigma_3]$.
f) Schreibe für Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ den Kommutator $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{A}]]$ um.

3.2 Levi-Civita-Symbol

a) Zeige, dass $\varepsilon_{ijk} a_i a_j = 0$.
(Hinweis: Die Indizes lassen sich beliebig umbenennen: $\varepsilon_{ijk} a_i a_j = \varepsilon_{lmk} a_l a_m = \varepsilon_{jik} a_j a_i$.)
b) Zeige in Indexschreibweise, dass für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ in einer dreidimensionalen, orthonormalen Basis mit euklidischer Metrik [1] gilt: $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$.

3.3 Spektraltheorem

Die Matrixdarstellung eines linearen Operators $\mathbf{A}$ in einer orthonormalen Basis $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ist durch $\mathbf{A}_E = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{pmatrix}$ mit $a^i{}_j = \mathbf{e}^i \mathbf{A} \mathbf{e}_j$ gegeben.

a) Schreiben Sie die Matrixdarstellung $\mathbf{A}_F = \begin{pmatrix} a'^1{}_1 & a'^1{}_2 & a'^1{}_3 \\ a'^2{}_1 & a'^2{}_2 & a'^2{}_3 \\ a'^3{}_1 & a'^3{}_2 & a'^3{}_3 \end{pmatrix}$ des Operators $\mathbf{A}$ in der neuen Basis $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ an. Die Basistransformation ist durch $\mathbf{f}_i = f^j{}_i \mathbf{e}_j$ gegeben.
b) Überprüfe die Orthogonalität der Basisvektoren $\mathfrak{B}'$ wenn $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - \sqrt{2}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \sqrt{2}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ und $\mathbf{f}_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$. Finde die dualen Vektoren $\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3$.

[1] Für eine euklidische Metrik mit orthonormalen Basen braucht nicht zwischen unteren und oberen Indizes unterschieden zu werden, da Basisvektoren und duale Basisvektoren zusammen fallen (man kann es aber natürlich weiterhin tun).

c) Berechne die Matrix $\mathbf{A}_E$ wenn $\mathbf{A}_F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d) Zeige $\mathbf{P}_i = \mathbf{f}_i \mathbf{f}^i$ (ohne Summe über i) für den zugehörigen Projektor $\mathbf{P}_i$ des Vektors $\mathbf{f}_i$.

e) Überprüfe ob sich der Operator $\mathbf{A}$ in der spektralen Form $\mathbf{A} = \sum_i \lambda_i \mathbf{P}_i$ schreiben lässt und bestimme die Eigenwerte λ_i.

f) Berechne $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{e}_1$.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2ab, 3ab, 3cde, 3f