3. Tutorium - Lösungen **30.10.2015**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel zu rechnen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

3.1 Multiple Choice Fragen

a) $\varepsilon_{2jk}a_j b_k = a_3b_1 - a_1b_3 = -2-1 = -3$
b) $\det\mathbf{A} = \varepsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}$
c) $\partial_i(x_ix_jx_j) = (\partial_ix_i)x_jx_j + x_i(\partial_ix_j)x_j + x_ix_j(\partial_ix_j) = \delta_{ii}x_jx_j + \delta_{ji}x_ix_j + \delta_{ji}x_ix_j = (d+2)\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$
d) $\partial_i\sqrt{x_jx_j} = \frac{1}{2\sqrt{x_jx_j}}\partial_i(x_jx_j) = \frac{1}{2\sqrt{x_jx_j}}(\delta_{ji}x_j + \delta_{ji}x_j) = \frac{x_i}{\sqrt{x_jx_j}}$
Anmerkung :
$$\partial_i(x_jx_j) = \underbrace{\partial_i\sum_j x_jx_j = \sum_j \partial_i x_jx_j}_{\text{(Die Reihenfolge (Summe und Ableitung) ist austauschbar)}} = \textstyle\sum_j[(\partial_ix_j)x_j + x_j(\partial_ix_j)]$$
$$\partial_i\sqrt{x_jx_j} = \underbrace{\partial_i\sqrt{\sum_j(x_jx_j)} \neq \sum_j\partial_i\sqrt{x_jx_j}}_{\text{(Die Reihenfolge (Summe und Ableitung) ist \textbf{nicht} austauschbar)}} = \textstyle\sum_j[(\partial_i\sqrt{x_j})\sqrt{x_j} + \sqrt{x_j}(\partial_i\sqrt{x_j})]$$
e) $\sigma_1\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2$
$\sigma_3\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2$
$[\sigma_1, \sigma_3] = \sigma_1\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 = -2i\sigma_2$.
f) $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{A}]] = \mathbf{A}[\mathbf{B}, \mathbf{A}] - [\mathbf{B}, \mathbf{A}]\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{BA} - \mathbf{AB}) - (\mathbf{BA} - \mathbf{AB})\mathbf{A} = \mathbf{ABA} - \mathbf{AAB} - \mathbf{BAA} + \mathbf{ABA} = 2\mathbf{ABA} - \mathbf{A}^2\mathbf{B} - \mathbf{BA}^2$

3.2 Levi-Civita-Symbol

a) $\varepsilon_{ijk}a_ia_j = \varepsilon_{lmk}a_la_m = \varepsilon_{jik}a_ja_i = -\varepsilon_{ijk}a_ja_i = -\varepsilon_{ijk}a_ia_j \to 2\times\varepsilon_{ijk}a_ia_j = 0$.
Zuerst wurden die Indizes einfach umbenannt, dann die Relation aus Aufgabe b) verwendet, und $a_ja_i = a_ia_j$ vertauscht, da die Reihenfolge von Zahlen egal ist. Zum Schluss wurde auf beiden Seiten $\varepsilon_{ijk}a_ia_j$ addiert.
Alternative Lösung :
$$\varepsilon_{ijk}a_ia_j = \textstyle\sum_{i(\neq k)}\sum_{j(\neq k)}\varepsilon_{ijk}a_ia_j = \sum_{i(\neq j,k)}\sum_{j(\neq i,k)}\varepsilon_{ijk}a_ia_j$$
$$= \textstyle\sum_{i(\neq k)}\sum_{j<i(\neq k)}\varepsilon_{ijk}a_ia_j + \underbrace{\displaystyle\sum_{i(\neq k)}\sum_{j>i(\neq k)}}_{\sum_i\sum_{j>i}=\sum_j\sum_{i<j}\text{: Änderung in der Reihenfolge der Doppelsumme}}\varepsilon_{ijk}a_ia_j$$
$$= \textstyle\sum_{i(\neq k)}\sum_{j<i(\neq k)}\varepsilon_{ijk}a_ia_j + \underbrace{\displaystyle\sum_{j(\neq k)}\sum_{i<j(\neq k)}\varepsilon_{ijk}a_ia_j}_{\text{Austausch der indexe zwischen } i \text{ und } j}$$
$$= \textstyle\sum_{i(\neq k)}\sum_{j<i(\neq k)}\varepsilon_{ijk}a_ia_j + \sum_{i(\neq k)}\sum_{j<i(\neq k)}\varepsilon_{jik}a_ja_i$$
$$= \textstyle\sum_{i(\neq k)}\sum_{j<i(\neq k)}\varepsilon_{ijk}a_ia_j - \sum_{i(\neq k)}\sum_{j<i(\neq k)}\varepsilon_{ijk}a_ja_i = 0$$
b) Es gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_ib_i$, und $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k$. Weiters: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$.
$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 + |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) + \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = a_ib_ia_jb_j + \varepsilon_{ijk}a_jb_k\varepsilon_{ilm}a_lb_m$$

$= a_i b_i a_j b_j + (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\, a_j b_k a_l b_m = a_i b_i a_j b_j + a_j a_j b_k b_k - a_j b_k a_k b_j = a_j a_j b_k b_k = (\vec{a}\cdot\vec{a})\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2.$

3.3 Spektraltheorem

a) Matrixdarstellung des linearen Operators $\mathbf{A}$ in der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$:

$$a^i{}_j = \mathbf{e}^i \mathbf{A} \mathbf{e}_j \to \mathbf{A} = \mathbf{e}_i a^i{}_j \mathbf{e}^j = \mathbf{E}\begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{pmatrix}\mathbf{E}^{-1} \equiv \mathbf{E}\mathbf{A}_E\mathbf{E}^{-1}$$

Basistransformation :

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j f^j{}_i \to (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2) = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} f^1{}_1 & f^1{}_2 & f^1{}_3 \\ f^2{}_1 & f^2{}_2 & f^2{}_3 \\ f^3{}_1 & f^3{}_2 & f^3{}_3 \end{pmatrix} \text{ oder } \mathbf{F} = \mathbf{E}\mathbf{F}_E,$$

$$\mathbf{f}^*_i = \mathbf{f}^i = f_j{}^i \mathbf{e}^j \to \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1{}^1 & f_2{}^1 & f_3{}^1 \\ f_1{}^2 & f_2{}^2 & f_3{}^2 \\ f_1{}^3 & f_2{}^3 & f_3{}^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} \text{ oder } \mathbf{F}^{*T} = \mathbf{F}_E^{*T}\mathbf{E}^{*T}\ (\mathbf{F}^* = \mathbf{E}^*\mathbf{F}^*_E)$$

(wobei $\mathbf{F}^{*T} = \mathbf{F}^{-1}$, $\mathbf{E}^{*T} = \mathbf{E}^{-1}$ und $\mathbf{F}_E^{*T} = \mathbf{F}_E^{-1}$.)

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}\mathbf{A}_E\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{F}\mathbf{F}_E^{-1}\mathbf{A}_E\mathbf{F}_E\mathbf{F}^{-1} \equiv \mathbf{F}\mathbf{A}_F\mathbf{F}^{-1} \to \begin{pmatrix} a'^1{}_1 & a'^1{}_2 & a'^1{}_3 \\ a'^2{}_1 & a'^2{}_2 & a'^2{}_3 \\ a'^3{}_1 & a'^3{}_2 & a'^3{}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_F = \mathbf{F}_E^{-1}\mathbf{A}_E\mathbf{F}_E$$

$\to a'^i{}_j = f_k{}^i a^k{}_l f^l{}_j$

Alternative Lösung : $a'^i{}_j = \mathbf{f}^i\mathbf{A}\mathbf{f}_j = f_k{}^i\mathbf{e}^k\mathbf{A}\mathbf{e}_l f^l{}_j = f_k{}^i a^k{}_l f^l{}_j$

b) $\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2 = 0, \quad \mathbf{f}_2\cdot\mathbf{f}_3 = 0, \quad \mathbf{f}_3\cdot\mathbf{f}_1 = 0.$ $\to \mathfrak{B}'$ ist eine orthogonale Basis.

$\mathbf{f}^1 = c\mathbf{f}_1^T \to \mathbf{f}^1\mathbf{f}_1 = c|\mathbf{f}_1|^2 = 4c = 1 \to \mathbf{f}^1 = (1/4)\mathbf{f}_1^T$. In gleicher Weise $\mathbf{f}^2 = (1/4)\mathbf{f}_2^T$ $\mathbf{f}^3 = (1/2)\mathbf{f}_3^T$.

c) $\mathbf{F}_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{F}_E^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}_E = \mathbf{F}_E\mathbf{A}_F\mathbf{F}_E^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{F}_E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 2 & -1/\sqrt{2} \\ 1 & -1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

d) Definition : (Orthogonaler) Projektor auf einem Vektor $\mathbf{x} \to \mathbf{P}_\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^T}{|\mathbf{x}|^2}$

Projektor : $\mathbf{P}_i = \frac{1}{|\mathbf{f}_i|^2}\mathbf{f}_i\mathbf{f}_i^T = \frac{1}{c|\mathbf{f}_i|^2}\mathbf{f}_i\mathbf{f}^i = \mathbf{f}_i\mathbf{f}^i$ (Ohne Summe über i)

Anmerkung : Der Operator $\mathbf{f}_i\mathbf{f}^i$ ist ein Transformationsoperator (z.B. $\mathbf{x} = \sum_i \mathbf{f}_i(\mathbf{f}^i\mathbf{x})$). Für nicht-orthogonale Basis ist der Operator (oder der (allgemeinen) Projektor) nicht gleich als der orthogonalen Projektor $\mathbf{P}_i = \frac{1}{|\mathbf{f}_i|^2}\mathbf{f}_i\mathbf{f}_i^T$.

e) $\mathbf{A} = \mathbf{F}\mathbf{A}_F\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{F}^{-1} = 3\mathbf{f}_1\mathbf{f}^1 + 1\mathbf{f}_2\mathbf{f}^2 + 0\mathbf{f}_3\mathbf{f}^3 = 3\mathbf{P}_1 + 1\mathbf{P}_2 + 0\mathbf{P}_3$

Eigenwerte : $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{3, 1, 0\}$.

Anmerkung : Das Spektraltheorem gilt für selbstadjungierte Operatoren, deren Eigenbasis orthogonal ist.

f) $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{e}_1 = (\mathbf{F}\mathbf{A}_F\mathbf{F}^{-1})^n\mathbf{e}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{A}_F)^n\mathbf{F}^{-1}\mathbf{e}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{A}_F)^n\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{F}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3^n \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3^n + 1 \\ \sqrt{2}(-3^n + 1) \\ 3^n + 1 \end{pmatrix}$