4. Tutorium **für 13.11.2015**

Die Beispiele sind in TUWEL bis Freitag, 8:00Uhr, anzukreuzen!

4.1 Multiple Choice Fragen

Beantworte a-d für die folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) $\det(2\mathbf{A}) =?$
b) $\det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}) =?$
c) $\mathrm{Spur}\left(\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\right) =?$
d) $\mathrm{Spur}\left((\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\right) =?$

Gegeben seien 2 orthonormale Basen $\mathfrak{B}_e = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ und $\mathfrak{B}_f = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ und ein Vektor (Tensorprodukt) $\mathbf{x} = 2^{-1/2}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_1)$ im Vektorraum $\mathfrak{V} = \mathrm{span}(\mathfrak{B}_e \otimes \mathfrak{B}_f)$.
e) Berechne den Rang des Projektors $\mathbf{E}_\mathbf{x} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}^T$.
f) $\tilde{\mathbf{E}}_e = \mathrm{Spur}_f \mathbf{E}_\mathbf{x} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{f}_i^T \mathbf{E}_\mathbf{x} \mathbf{f}_i$ ist die partielle Spur des Projektor über der Basis $\mathfrak{B}_f$. Berechne den Rang des Operators $\tilde{\mathbf{E}}_e$.

4.2 Kommutator

$\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ seien lineare Operatoren, die die Kommutatorrelationen $[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0$ und $[\mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0$ erfüllen.
a) Zeige $[e^{\mathbf{A}}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0$.
b) Zeige $\frac{d}{dt}\mathbf{C}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}(t))\,\mathbf{C}(t)$ wobei $\mathbf{C}(t) = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$ und $\mathbf{B}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}e^{-\mathbf{A}t}$. ($\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind unabhängig von t.)
c) Berechne $\frac{d^n}{dt^n}\mathbf{B}(t)$ für $n = 1, 2, 3, \cdots$ und zeige $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B} + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]t$.
d) Zeige $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]}$

4.3 Satz von Cayley-Hamilton

Gegeben sei eine 3×3 Matrix $\mathbf{A}$.
a) Schreibe das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ an und zeige

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \mathrm{Spur}(\mathbf{A})\lambda^2 + \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}(\mathbf{A})^2 - \mathrm{Spur}(\mathbf{A}^2))\lambda - \det\mathbf{A}\,.$$

($\mathbf{I}$: Einheitsmatrix)

b) Zeige $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ wenn $\mathbf{A}$ symmetrisch und diagonalisierbar ist (d.h. $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$ mit $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$).

c) Zeige, wenn $\det(\mathbf{A}) \neq 0$,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\left[\mathbf{A}^2 - \mathrm{Spur}(\mathbf{A})\mathbf{A} + \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}(\mathbf{A})^2 - \mathrm{Spur}(\mathbf{A}^2))\mathbf{I}\right]$$

d) Berechne $\mathbf{A}^{-1}$ für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ankreuzbar: 1a-d, 1ef, 2a-c, 2d, 3a, 3b-d