4. Tutorium - Lösungen **13.11.2015**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel zu rechnen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

4.1 Multiple Choice Fragen

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\det(2\mathbf{A}) = 2^3 \det\mathbf{A} = -8$ oder $\det(2\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8$

b) $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\right) = \left(\det\mathbf{A}^{-1}\right)(\det\mathbf{B})(\det\mathbf{A})\left(\det\mathbf{B}^{-1}\right) = (\det\mathbf{A})^{-1}(\det\mathbf{B})(\det\mathbf{A})(\det\mathbf{B})^{-1} = 1$

c) $\text{Spur}\left(\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\right) = \text{Spur}\left(\mathbf{A}^T\right) + \text{Spur}(\mathbf{B}) = \text{Spur}(\mathbf{A}) + \text{Spur}(\mathbf{B}) = 8$

d) $\text{Spur}\left((\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\right) = \text{Spur}\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}\right) = \text{Spur}\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\right) = \text{Spur}(\mathbf{A}) = 2$

e) Die Matrixdarstellung des Projektors in der Basis $\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_2, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_2\}$:

$$\mathbf{E}_\mathbf{x} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}^T = \tfrac{1}{2}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_1) \otimes (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_1)^T \to \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \text{Rang } 1$$

f) $\text{Spur}_f \mathbf{E}_\mathbf{x} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{f}_i^T \mathbf{E}_\mathbf{x} \mathbf{f}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^2 \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i \to \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \text{Rang } 2$

4.2 Kommutator

a) Wenn $[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0$, $\mathbf{A}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{A}$. $\to \mathbf{A}^2[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{A} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{A}^2 \to \cdots \to \mathbf{A}^n[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}^{n-1}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{A} = \mathbf{A}^{n-2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{A}^2 = \cdots = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{A}^n$

$\to e^{\mathbf{A}}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \sum_n \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\sum_n \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]e^{\mathbf{A}}$

b) $\mathbf{C}(t) = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{C}(t) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}e^{\mathbf{B}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} + \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}e^{-\mathbf{A}t}}_{\equiv \mathbf{B}(t)} e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}(t))\,\mathbf{C}(t)$$

$$\text{Anmerkung}: \frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n t^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n \frac{d}{dt}t^n = \frac{1}{0!}\mathbf{A}^0 \frac{d}{dt}t^0 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n \frac{d}{dt}t^0 = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n-1)!}\mathbf{A}^n t^{n-1} =$$
$$\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!}\mathbf{A}^{m+1}t^m = \underbrace{\mathbf{A}\left(\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!}\mathbf{A}^m t^m\right)}_{\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}} = \underbrace{\left(\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!}\mathbf{A}^m t^m\right)\mathbf{A}}_{e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}}$$

$$\text{c) } \frac{d}{dt}\mathbf{B}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}e^{-\mathbf{A}t}\right) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{B}e^{-\mathbf{A}t} - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{A}e^{-\mathbf{A}t} = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]}_{\substack{= [\mathbf{A}, \mathbf{B}]e^{\mathbf{A}t} \\ \text{(Bsp.a)}}} e^{-\mathbf{A}t} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$$

Für $n > 1$, $\frac{d^n}{dt^n}\mathbf{B}(t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$

$\to \mathbf{B}(t) = \mathbf{B} + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]t$.

d) $\frac{d}{dt}\mathbf{C}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}(t))\mathbf{C}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B} + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]t)\mathbf{C}(t)$

$\to \mathbf{C}(t) = \mathbf{C}(t=0)\exp\left(\mathbf{A}t + \mathbf{B}t + \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]t^2\right) = \exp\left(\mathbf{A}t + \mathbf{B}t + \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]t^2\right)$

Für $t = 1$, $\mathbf{C}(1) = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = \exp\left(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\right)$

4.3 Satz von Cayley-Hamilton

a) $p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \varepsilon_{ijk}(\lambda\delta_{1i} - a_{1i})(\lambda\delta_{2j} - a_{2j})(\lambda\delta_{3k} - a_{3k}) = \varepsilon_{ijk}\delta_{1i}\delta_{2j}\delta_{3k}\lambda^3$
$-\varepsilon_{ijk}\left(a_{1i}\delta_{2j}\delta_{3k} + \delta_{1i}a_{2j}\delta_{3k} + \delta_{1i}\delta_{2j}a_{3k}\right)\lambda^2 + \varepsilon_{ijk}\left(a_{1i}a_{2j}\delta_{3k} + \delta_{1i}a_{2j}a_{3k} + a_{1i}\delta_{2j}a_{3k}\right)\lambda - \varepsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}\delta_{3k}$
$= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})\lambda - \det\mathbf{A}$
$= \lambda^3 - (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 + \frac{1}{2}(a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji})\lambda - \det\mathbf{A} = \lambda^3 - \mathrm{Spur}(\mathbf{A})\lambda^2 + \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}(\mathbf{A})^2 - \mathrm{Spur}(\mathbf{A}^2))\lambda - \det\mathbf{A}$

Anmerkung:
$\mathrm{Spur}(\mathbf{A})^2 = a_{ii}a_{jj} = (a_{11}+a_{22}+a_{33})(a_{11}+a_{22}+a_{33}) = a_{11}a_{11}+a_{22}a_{22}+a_{33}a_{33}+2a_{11}a_{22}+2a_{22}a_{33}+2a_{33}a_{11}$,
$\mathrm{Spur}(\mathbf{A}^2) = a_{ij}a_{ji} = a_{i1}a_{1i} + a_{i2}a_{2i} + a_{i3}a_{3i} = (a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31}) + (a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{23}a_{32}) + (a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{33}a_{33}) = a_{11}a_{11} + a_{22}a_{22} + a_{33}a_{33} + 2a_{12}a_{21} + 2a_{23}a_{32} + 2a_{13}a_{31}$

b) $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$ mit $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I} \to \mathbf{A}^n = \mathbf{U}\mathbf{D}^n\mathbf{U}^T = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}\mathbf{U}^T$

$$\to p(\mathbf{A}) = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{pmatrix}\mathbf{U}^T - \mathrm{Spur}(\mathbf{A})\,\mathbf{U}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}\mathbf{U}^T$$
$$+\frac{1}{2}(\mathrm{Spur}(\mathbf{A})^2 - \mathrm{Spur}(\mathbf{A}^2))\mathbf{U}\begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^1 \end{pmatrix}\mathbf{U}^T - (\det\mathbf{A})\mathbf{U}\begin{pmatrix} \lambda_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^0 \end{pmatrix}\mathbf{U}^T$$
$$= \mathbf{U}\begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & p(\lambda_3) \end{pmatrix}\mathbf{U}^T = \mathbf{0}$$

Anmerkung 1: $p(\mathbf{A}) \neq \det(\mathbf{A}\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Die richtige Ersetzung von λ durch $\mathbf{A}$ ist $p(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}\otimes\mathbf{I} - \mathbf{I}\otimes\mathbf{A})$ wobei z.B. $\mathbf{A}\otimes\mathbf{I}$ eine Blockdiagonalmatrix mit $\mathbf{A}$ als den diagonalen Blockmatrizen ist. Die Determinate ist eine partielle Determinante über der 2 Matrix im Tensorprodukt.

Anmerkung 2: Der Satz von Cayley-Hamilton, $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, gilt für (beliebige) $n \times n$ Matrizen.
$\mathbf{B}$ ist die Matrix, die die Bedingung $\mathbf{B}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{I} = p(\lambda)\mathbf{I}$ erfüllt. (Diese Matrix $\mathbf{B}$ heißt "adjunkte Matrix".) Weil $p(\lambda)$ das characteristische Polynom vom Grad n ($p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} c_i\lambda^i$) ist, ist $\mathbf{B}$ eine Funktion von λ und hat die Polynomform vom Grad $n-1$ ($\mathbf{B} = \mathbf{B}(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i\mathbf{B}_i$).
$p(\lambda)\mathbf{I} = \mathbf{B}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i\mathbf{B}_i(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{n-1}(\lambda^{i+1}\mathbf{B}_i - \lambda^i\mathbf{B}_i\mathbf{A})$
$= \mathbf{B}_0\mathbf{A} + \sum_{i=1}^{n-1}\lambda^i(\mathbf{B}_{i-1} - \mathbf{B}_i\mathbf{A}) + \lambda^n\mathbf{B}_{n-1}$
Vergelich mit $p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} c_i\lambda^i$:
$c_0\mathbf{I} = -\mathbf{B}_0\mathbf{A}, \quad c_i\mathbf{I} = \mathbf{B}_{i-1} - \mathbf{B}_i\mathbf{A} \;\; (0 < i < n), \quad c_n\mathbf{I} = \mathbf{B}_{n-1}$
$\to c_0\mathbf{I} = -\mathbf{B}_0\mathbf{A}, \quad c_i\mathbf{A}^i = \mathbf{B}_{i-1}\mathbf{A}^i - \mathbf{B}_i\mathbf{A}^{i+1} \;\; (0 < i < n), \quad c_n\mathbf{A}^n = \mathbf{B}_{n-1}\mathbf{A}^n$
$\to p(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{n} c_i\mathbf{A}^i = -\mathbf{B}_0\mathbf{A} + (\mathbf{B}_0\mathbf{A}^1 - \mathbf{B}_1\mathbf{A}^2) + (\mathbf{B}_1\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}_2\mathbf{A}^3) + \cdots + (\mathbf{B}_{n-2}\mathbf{A}^{n-1} - \mathbf{B}_{n-1}\mathbf{A}^n) + \mathbf{B}_{n-1}\mathbf{A}^n = 0$

c) $p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 - \mathrm{Spur}(\mathbf{A})\mathbf{A}^2 + \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}(\mathbf{A})^2 - \mathrm{Spur}(\mathbf{A}^2))\mathbf{A} - \det(\mathbf{A})\mathbf{I} = 0$
$\to \mathbf{A}^2 - \mathrm{Spur}(\mathbf{A})\mathbf{A} + \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}(\mathbf{A})^2 - \mathrm{Spur}(\mathbf{A}^2))\mathbf{I} - \det(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1} = 0$
$\to \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\left[\mathbf{A}^2 - \mathrm{Spur}(\mathbf{A})\mathbf{A} + \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}(\mathbf{A})^2 - \mathrm{Spur}(\mathbf{A}^2))\mathbf{I}\right]$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\det(\mathbf{A}) = 2 - 1 = 1$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(1-7)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$