5. Tutorium **für 20.11.2015**

Die Beispiele sind in TUWEL bis Freitag, 8:00Uhr, anzukreuzen!

5.1 Multiple Choice Fragen

Gegeben sei ein Ortsvektor $\mathbf{r}$, ein Impuls $\mathbf{p}$ und der entsprechende Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Beantworte a-d für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik. (Der Impuls $\mathbf{p}$ ist unabhängig vom Ortsvektor $\mathbf{r}$.)
a) Berechne $\operatorname{rot} \mathbf{L}$.
b) Berechne $\operatorname{div} \mathbf{L}$.
c) Berechne $\operatorname{div} (\mathbf{r} \times \mathbf{L})$.
d) Berechne $\operatorname{grad}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{L})$.

e) Berechne das Fächenintegral $\int_F \operatorname{div}(\mathbf{w})\, dA$ für $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} (a/b)x + y \\ bx \end{pmatrix}$ und den Bereich $F = \{(x, y)|x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$.
f) Berechne das Kurvenintegral $\oint_C \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s}$ wobei C die Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ist und der Integrationsweg im mathematisch positiven Drehsinn läuft.

5.2 Reziprokes Gitter und metrischer Tensor

Gegeben sei ein fcc-Kristallgitter mit Basis $\mathfrak{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$. In der kartesischen Basis sind die Basisvektoren durch $\mathbf{a}_1 = (L/2)(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})$, $\mathbf{a}_2 = (L/2)(\hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{x}})$ und $\mathbf{a}_3 = (L/2)(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$ gegeben. Die Basis des reziproken Gitters ist die duale Basis $\mathfrak{B}^* = \{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$.
a) Schreibe die dualen Vektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ in der kartesischen Basis an.
b) Berechne die metrischen Tensoren g^{ij} und g_{ij} für die Basis $\mathfrak{B}$ und überprüfe $g^{ij} g_{jk} = \delta_{ik}$.
c) Zeige $\det(g_{ij}) = V^2$ und $\det(g^{ij}) = V^{-2}$ wobei V das Volumen der primitiven Einheitszelle des Kristallgitters ist.

5.3 Semiparabolische Koordinaten

Betrachte eine infinitesimale Änderung $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i$ des Vektors $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ wobei $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ die kartesischen Basisvektoren sind. Eine lokale Transformation ist die linearisierte Basistransformation der infinitesimalen Änderung, d.h. $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i = dx'^i \mathbf{e}'_i$. Beantworte die folgenden Fragen für die Transformation zu semiparabolischen Koordinaten $x'^1 = \xi$, $x'^2 = \eta$, $x'^3 = \phi$. Die Transformation zwischen kartesischen Koordinaten und semiparabolischen Koordinaten ist gegeben durch

$$x^1 = \xi\eta \cos\phi,\ x^2 = \xi\eta \sin\phi,\ x^3 = (\xi^2 - \eta^2)/2.$$

a) Schreibe die Basisvektoren $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ und $\mathbf{e}'_3$ in der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ an.
b) Berechne den metrischen Tensor g_{ij} der neuen Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$.
c) Schreibe die Länge der infinitesimalen Änderung $ds = \sqrt{dx^i dx_i}$ in die semi-parabolischen Koordinaten um.
d) Berechne die Länge der Kurve $C = \{(x^1, x^2, x^3) | -\xi_a \leq \xi \leq \xi_b, \eta = 0, \phi = 0\}$ $(\xi_a, \xi_b > 0)$.
e) Die kinetische Energie eines freien Teilchens ist gegeben durch

$$K = \frac{1}{2} m \frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt} .$$

Zeige $\partial K / \partial v'^i = m v'_i$ wobei $v'^i = dx'^i/dt$ und $v'_i = dx'_i/dt$.

Ankreuzbar: 1a-d, 1ef, 2ab, 2c, 3ab, 3c-e