5. Tutorium - Lösungen **20.11.2015**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel zu rechnen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

5.1 Multiple Choice Fragen

a) $\mathrm{rot}\,\mathbf{L} = \mathrm{rot}(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) \to \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\partial_j x_l p_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j x_l p_m = \partial_j x_i p_j - \partial_j x_j p_i = \delta_{ji}p_j - \delta_{jj}p_i = -2p_i \to -2\mathbf{p}$
b) $\mathrm{div}\,\mathbf{L} \to \partial_i L_i = \partial_i \varepsilon_{ijk} x_j p_k = \varepsilon_{ijk}\delta_{ij}p_k = \varepsilon_{iik}p_k = 0$
c) $\mathrm{div}\,(\mathbf{r}\times\mathbf{L}) \to \partial_i\varepsilon_{ijk}x_j L_k = \varepsilon_{ijk}\delta_{ij}L_k + \varepsilon_{ijk}x_j\partial_i L_k = \varepsilon_{ijk}x_j\partial_i\varepsilon_{klm}x_l p_m = \varepsilon_{ijk}x_j\varepsilon_{klm}\delta_{il}p_m = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kim}x_j p_m$ $= (\delta_{ii}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{ji})x_j p_m = 3x_j x_j - x_i p_i = 2x_i p_i \to 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$
d) $\mathrm{grad}\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{L}) \to \partial_i x_j L_j = \delta_{ij}L_j + x_j\partial_i L_j = L_i + x_j\partial_i L_j = L_i + x_j\varepsilon_{jil}p_l = L_i + \varepsilon_{jil}p_l x_j \to \mathbf{L} + \mathbf{p}\times\mathbf{r} = 0$
e) $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} (a/b)x + y \\ bx \end{pmatrix}, \quad \mathrm{div}(\mathbf{w}) = a/b$
$\int_F \mathrm{div}\mathbf{w} d\mathbf{f} = (a/b)\int_V \, d\mathbf{f} = (a/b)\pi ab = \pi a^2$
f) Parametrisierung entlang der Ellipse: $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}, \quad d\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix} dt$
$\int_C \mathbf{w}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} (a^2/b)\cos t + b\sin t \\ ab\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{a^3}{b}\cos t\sin t - ab\sin^2 t + ab^2\cos^2 t\right) dt$
$= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{a^3}{2b}\sin(2t) - ab\frac{1-\cos(2t)}{2} + ab^2\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) dt = -\pi ab + \pi ab^2$

5.2 Reziprokes Gitter und metrischer Tensor

Basisvektoren : $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$ (Für orthonormale Basisvektoren $\{\hat{\mathbf{x}}^*, \hat{\mathbf{y}}^*, \hat{\mathbf{z}}^*\} = \{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$)
fcc : $\mathbf{a}_1 = \frac{L}{2}(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})$, $\mathbf{a}_2 = \frac{L}{2}(\hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{x}})$, $\mathbf{a}_3 = \frac{L}{2}(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$
a) Für die dualen Basis, z.B., ist $\mathbf{a}^1$ orthogonal zur originalen Basisvektoren $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$. Deshalb ist $\mathbf{a}^1$ proportional zu $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$.
Allgemein gilt $\mathbf{a}^i = c\varepsilon_{ijk}\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k = \varepsilon_{ijk}\frac{\mathbf{a}_j\times\mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_i\cdot(\mathbf{a}_j\times\mathbf{a}_k)} = \varepsilon_{ijk}\frac{1}{V}\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k$ (ohne Summe über j und k)
Der Normierungsfaktor $c = 1/V$ wurde durch $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_i = 1$ bestimmt. (wobei das Volumen der primitiven Einheitszelle: $V = \mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k) = L^3/4$)
$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{L}(-\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})$, $\mathbf{a}^2 = \frac{1}{L}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})$ und $\mathbf{a}^3 = \frac{1}{L}(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}})$
Das reziproke Gitter des fcc-Gitters ist das bcc-Kristallgitter (und vice versa).
b) Metrische Tensoren: $(g^{ij}) = (\mathbf{a}^i\cdot\mathbf{a}^j) = \frac{1}{L^2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = (\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j) = \frac{L^2}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$(g^{ij}g_{jk}) = \frac{1}{L^2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\frac{L^2}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

c) $\det(g_{ij}) = \frac{L^6}{64}(8+1+1-(2+2+2)) = \frac{L^6}{16} = V^2, \quad \det(g^{ij}) = \frac{1}{L^6}(27-1-1-(3+3+3)) = \frac{16}{L^6} = \frac{1}{V^2}$

Anmerkung : Das reziprokes Gitter wird in der Kristallographie verwendet. Z.B. Die Welle, $\exp(2\pi i\mathbf{k}_n\cdot\mathbf{r})$ mit $\mathbf{k}_n = n_1\mathbf{a}^1 + n_2\mathbf{a}^2 + n_3\mathbf{a}^3$, hat die gleiche Periodizität als das originale Gitter (n_j : ganze Zahl). Das heißt, dass bei den Gitterpunkten $\mathbf{r}_m = m^1\mathbf{a}_1 + m^2\mathbf{a}_2 + m^3\mathbf{a}_3$ (m^j : ganze Zahl) die Welle immer 1 ergibt, $\exp(2\pi i\mathbf{k}_n\cdot\mathbf{r}_m) = \exp(2\pi i(n_1m^1 + n_2m^2 + n_3m^3)) = 1$.

5.3 Semiparabolische Koordinaten

a) $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ mit $\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{y}}$ und $\mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{z}}$.
Infinitesimale Änderung von $\mathbf{x}$: $\mathbf{x} + \mathbf{dx} = \mathbf{x} + dx^i \mathbf{e}_i$.
Lokale Basistransformation (linearisierte Basistransformation für die infinitesimalen Änderung):

$$\mathbf{x} + \mathbf{dx} = \mathbf{x} + dx^i \mathbf{e}_i = \mathbf{x} + \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j \mathbf{e}_i \equiv \mathbf{x} + dx'^j \mathbf{e}'_j. \text{ (mit } \mathbf{e}'_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \mathbf{e}_i)$$

Semiparabolische Koordinaten: $x'^1 = \xi$, $x'^2 = \eta$, $x'^3 = \phi$
Transformation zwischen Kartesischen Koordinaten und semiparabolischen Koordinaten:

$$x^1 = \xi\eta\cos\phi,\ x^2 = \xi\eta\sin\phi \text{ und } x^3 = (\xi^2 - \eta^2)/2.$$

$\mathbf{e}'_1 = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x'^1}\mathbf{e}_3 = \eta\cos\phi\,\mathbf{e}_1 + \eta\sin\phi\,\mathbf{e}_2 + \xi\,\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}'_2 = \frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x'^2}\mathbf{e}_3 = \xi\cos\phi\,\mathbf{e}_1 + \xi\sin\phi\,\mathbf{e}_2 - \eta\,\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}'_3 = \frac{\partial x^1}{\partial x'^3}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^3}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x'^3}\mathbf{e}_3 = -\xi\eta\sin\phi\,\mathbf{e}_1 + \xi\eta\cos\phi\,\mathbf{e}_2$

b) $g_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \begin{pmatrix} \xi^2+\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2+\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2\eta^2 \end{pmatrix}$

c) $dx^i = \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^j}\right) dx'^j$
$ds = \sqrt{dx^i dx_i} = \sqrt{dx'^i dx'_i} = \sqrt{g_{ij} dx'^i dx'^j} = \sqrt{g_{ji} dx'^i dx'^j} = \sqrt{(\xi^2+\eta^2)(d\xi)^2 + (\xi^2+\eta^2)(d\eta)^2 + \xi^2\eta^2(d\phi)^2}$

d) $L = \int_C \sqrt{(ds)^2}\Big|_{\eta=0,\phi=0} = \int_C \sqrt{\xi^2(d\xi)^2} = \int_{-\xi_a}^{\xi_b} |\xi| d\xi = -\int_{-\xi_a}^{0} \xi d\xi + \int_0^{\xi_b} \xi d\xi$
$= \frac{1}{2}(\xi_a^2 + \xi_b^2) = z_a + z_b \qquad (z_{a/b} = \frac{1}{2}\xi_{a/b}^2)$

e) $K = \frac{1}{2}m\frac{dx^i}{dt}\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^i}{dt} = \frac{1}{2}mv^iv^i \to p_i = \frac{\partial K}{\partial v^i} = mv^i$
$K = \frac{1}{2}m\frac{dx^i}{dt}\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{dx'^i}{dt}\frac{dx'_i}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{dx'^i}{dt}g_{ij}\frac{dx'^j}{dt} = \frac{1}{2}mg_{ij}v^iv^j$
$\to p'_i = \frac{\partial K}{\partial v'^i} = \frac{1}{2}mg_{ij}v^j + \frac{1}{2}m\underbrace{g_{ji}}_{=g_{ij}}v^j = mg_{ij}v^j = mg_{ij}\frac{dx'^j}{dt} = m\frac{dx'_i}{dt}$

Anmerkung :
$p_\xi = \frac{1}{2}m(\xi^2+\eta^2)\frac{d\xi}{dt} = m|\mathbf{x}|v_\xi$, $p_\eta = \frac{1}{2}m(\xi^2+\eta^2)\frac{d\eta}{dt} = m|\mathbf{x}|v_\eta$, $p_\phi = \frac{1}{2}m\xi^2\eta^2\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}m(x^2+y^2)v_\phi = L_z$
Sie heißen kanonischen Impuls in der semiparabolischen Koordinaten.