6. Tutorium **für 20.11.2015**

Die Beispiele sind in TUWEL bis Freitag, 8:00Uhr, anzukreuzen!

6.1 Multiple Choice Fragen

Beantworte a und b für einen Kreis C mit Radius 2 ($x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$) und den Bereich F innerhalb dem Kreis ($x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 0$).

a) Berechne das Flächenintegral $\int_F (\mathrm{rot}\mathbf{b}) \cdot d\mathbf{A}$ für $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Berechne das Kurvenintegral $\oint_C \mathbf{b} \cdot d\mathbf{s}$.

Beantworte c-f für einen Kreis C mit Radius 2 ($|w| = 2$) in der komplexen Ebene.
c) Berechne $\oint_C \frac{w}{w^2-w-12} dw$
d) Berechne $\oint_C \frac{1}{2w^2-7w+3} dw$
e) Berechne $\oint_C \frac{2w}{4w^2-8w+3} dw$
f) Berechne $\oint_C \frac{w^2+w}{4w^2-4w+1} dw$

6.2 Differentialoperatoren

Betrachten Sie die lokale Transformation zwischen den kartesischen Koordinaten $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ und den Kugelkoordinaten $(x'^1, x'^2, x'^3) = (r, \theta, \phi)$.
a) Berechne die Transformationsmatrix $\mathbf{A}$ zwischen den Basisvektoren ($(\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2\ \mathbf{e}'_3) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)\,\mathbf{A}$).
b) Berechne den metrischen Tensor $\mathbf{g}$ und seine Inverse $\mathbf{g}^{-1}$ für die Kugelkoordinaten.
c) Zeige

$$\nabla\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{e}'_i g^{ij} \frac{\partial}{\partial x'^j} \psi(\mathbf{x})$$

und schreibe den Gradient in Kugelkoordinaten an.

6.3 Satz von Green

a) Für komplexe analytische Funktionen $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ zeige

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \mathbf{b}_1 \cdot d\mathbf{s} + i \oint_C \mathbf{b}_2 \cdot d\mathbf{s}$$

wobei C eine geschlossene Kurve in der komplexen Ebene und $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$. x, y sind reell und u, v sind reelle Funktionen.

b) Zeige $\oint_C f(z)dz = 0$ mit Hilfe des Satzes von Green (der stokessche Integralsatz in 2D)

$$\oint_C \mathbf{b} \cdot d\mathbf{s} = \int_F (\partial_x b^2 - \partial_y b^1) dA \,.$$

F ist der Bereich innerhalb C und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}$.

6.4 Residuensatz

a) C_1 ist ein offener Halbkreis $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ in der komplexen Ebene. Zeige für $t > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_1} \frac{e^{izt}}{z^2 - 2iz - 2} dz = 0 \,.$$

b) Berechne das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izt}}{z^2-2iz-2} dz$ mit Hilfe des Residuensatzes.

Ankreuzbar: 1a-b, 1c-f, 2ab, 2c, 3ab, 4ab