6. Tutorium - Lösungen **27.11.2015**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel zu rechnen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

6.1 Multiple Choice Fragen

a)

$\int_F (\text{rot}\mathbf{b}) \cdot d\mathbf{A} = \int_F (\text{rot}\mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{z}}\, dA = \int_F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA = 2\int_F dA = 8\pi$

b)

Parametrisierung entlang des Kreises: $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

$d\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

$\oint_C \mathbf{b} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} 4(\sin^2 t + \cos^2 t)dt = 4\int_0^{2\pi} dt = 8\pi$

c)

$\oint_C \frac{w}{w^2-w-12}dw = \oint_C \frac{w}{(w-4)(w+3)}dw = 0$ da alle Pole ($w = 4, -3$) außerhalb C ist.

d)

$\oint_C \frac{1}{2w^2-7w+3}dw = \oint_C \frac{1}{2(w-1/2)(w-3)}dw = 2\pi i \left.\frac{1}{2(w-3)}\right|_{w=1/2} = -\frac{2}{5}\pi i$

e)

$\oint_C \frac{2w}{4w^2-8w+3}dw = \oint_C \frac{w}{2(w-1/2)(w-3/2)}dw = 2\pi i \left.\frac{w}{2(w-1/2)}\right|_{w=3/2} + 2\pi i \left.\frac{w}{2(w-3/2)}\right|_{w=1/2} = \frac{3}{2}\pi i - \frac{1}{2}\pi i = \pi i$

f)

$\oint_C \frac{w^2+w}{4w^2-4w+1}dw = \oint_C \frac{w^2+w}{4(w-1/2)^2}dw = 2\pi i \frac{1}{4} \left.\frac{d}{dw}(w^2+w)\right|_{w=1/2} = 2\pi i \left.\frac{1}{4}(2w+1)\right|_{w=1/2} = \pi i$

6.2 Differentialoperatoren

a)

Kartesische Basis: $\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{z}}$.

Kugelkoordinaten: $(x'^1, x'^2, x'^3) = (r, \theta, \phi)$

Transformation der Koordinaten: $x^1 = r\sin\theta\cos\phi$, $x^2 = r\sin\theta\sin\phi$, $x^3 = r\cos\theta$.

Transformation der Basis: $\mathbf{e}'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\mathbf{e}_j$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x'^1}\mathbf{e}_3 = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_2 + \cos\theta\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 &= \frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x'^2}\mathbf{e}_3 = r\cos\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_1 + r\cos\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_2 - r\sin\theta\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 &= \frac{\partial x^1}{\partial x'^3}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^3}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x'^3}\mathbf{e}_3 = -r\sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_1 + r\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_2 \end{aligned}\right\} \to (\mathbf{e}'_1\,\mathbf{e}'_2\,\mathbf{e}'_3) = (\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3)\,\mathbf{A}$$

wobei $a^i{}_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$

b)

$g_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = a^k{}_i \mathbf{e}_k a^l{}_j \mathbf{e}_l = a^k{}_i a^l{}_j \delta_{kl} = a^k{}_i a^k{}_j \to \mathbf{g} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$

Die Transformationsmatrix $\mathbf{A}$ ist eine orthogonale Matrix. ($\mathbf{A}^T\mathbf{A} \to \text{diag}(1, r^2, r^2\sin^2\theta)$).

Die Inverse: $\mathbf{g}^{-1} \to \text{diag}(1, 1/r^2, 1/(r^2\sin^2\theta)) = \{g^{ij}\}$

c)
Differentialoperator: $\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^j} = a^j{}_i \frac{\partial}{\partial x^j}$
$\mathbf{e}'_i g^{ij} \frac{\partial}{\partial x'^j}\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{e}'_i g^{ij} a^k{}_j \frac{\partial}{\partial x^k}\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_l \underbrace{a^l{}_i g^{ij} a^k{}_j}_{=\mathbf{A}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}} \frac{\partial}{\partial x^k}\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_l\, \delta^{lk} \frac{\partial}{\partial x^k}\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^k \frac{\partial}{\partial x^k}\psi(\mathbf{x}) = \nabla\psi(\mathbf{x})$
In Kugelkoordinaten
$\mathbf{e}'_j g^{jk} \frac{\partial}{\partial x'^k}\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^r\ \partial_r\psi(\mathbf{x}) + \mathbf{e}^\theta\ \frac{1}{r^2}\partial_\theta\psi(\mathbf{x}) + \mathbf{e}^\phi\ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi\psi(\mathbf{x})\,.$

Anmerkung 1:
Die Transformation des Differentialoperators, $\frac{\partial}{\partial x'^i} = a^j{}_i \frac{\partial}{\partial x^j}$, ist gleich als die Transformation der Basisvektoren $\mathbf{e}'_i = a^j{}_i \mathbf{e}_j$.
$\rightarrow (\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3})$ ist eine kovariante Vektor, d.h. $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $\partial'_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$
In Allgemeinen ist der Gradient durch $\nabla\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^i\partial_i\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{e}'^i\partial'_i\psi(\mathbf{x})$ gegeben.

Anmerkung 2 : Wenn die Basisvektoren normiert sind (d.h. $\hat{\mathbf{e}}^r = \mathbf{e}^r$, $\hat{\mathbf{e}}^\theta = \frac{1}{r}\mathbf{e}^\theta$, $\hat{\mathbf{e}}^\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}^\phi$), gilt
$\nabla\psi(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{e}}^r\ \partial_r\psi(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{e}}^\theta\ \frac{1}{r}\partial_\theta\psi(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{e}}^\phi\ \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\psi(\mathbf{x})$

6.3 Satz von Green

a)
Parametrisierung: $z = x(t) + iy(t)$
$\oint_C f(z)dz = \int_C (u+iv)\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)dt = \int_C (u\frac{dx}{dt} - v\frac{dy}{dt})dt + i\int_C (v\frac{dx}{dt} + u\frac{dy}{dt})dt$
$= \int_C \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} dt + i\int_C \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} dt = \oint_C \mathbf{b}_1 \cdot d\mathbf{s} + i\oint_C \mathbf{b}_2 \cdot d\mathbf{s}$
b)
Satz von Green (stokessche Integralsatz in 2D):
$\oint_C \mathbf{b}_1 \cdot d\mathbf{s} = \int_F (\partial_x b^2{}_1 - \partial_y b^1{}_1)dA = \int_F (-\partial_x v - \partial_y u)dA$
$\oint_C \mathbf{b}_2 \cdot d\mathbf{s} = \int_F (\partial_x b^2{}_2 - \partial_y b^1{}_2)dA = \int_F (\partial_x u - \partial_y v)dA$
Für analytische Funktionen gilt die Cauchy-Riemann-Gleichung: $\partial_x v = -\partial_y u$ und $\partial_y v = \partial_x u$.
$\oint_C f(z)dz = \int_F (-\partial_x v - \partial_y u)dA + i\int_F (\partial_x u - \partial_y v)dA = \int_F (\partial_y u - \partial_y u)dA + i\int_F (\partial_x u - \partial_x u)dA = 0$

Anmerkung: Cauchy-Riemann-Gleichung
$f(z)$ ist eine komplex-differenzierbare Funktion
$\rightarrow f'(z) = \lim_{dz\rightarrow 0}\frac{f(z+dz)-f(z)}{dz}$. Das glit für beliebige Richtung der Änderung dz.
z.B entlang der reellen Achse oder entlang der imaginären Achse $f'(z) = \lim_{dx\rightarrow 0}\frac{f(z+dx)-f(x)}{dz} = \lim_{dy\rightarrow 0}\frac{f(z+idy)-f(x)}{idy}$
$\rightarrow \partial f(z)/\partial x = -i\partial f(z)/\partial y \rightarrow \partial_x v = -\partial_y u$ und $\partial_y v = \partial_x u$.

6.4 Residuensatz

a) Parametrisierung: $z = Re^{i\theta}$
$\int_{C_1} \frac{e^{izt}}{z^2-2iz-2}dz = \int_0^\pi \frac{\exp(iRe^{i\theta}t)}{R^2e^{2i\theta}-2iRe^{i\theta}-2}\frac{dz}{d\theta}d\theta = \int_0^\pi \frac{\exp(iRt\cos\theta - tR\sin\theta)}{R^2e^{2i\theta}-2iRe^{i\theta}-2} iRe^{i\theta}d\theta$
Im Limes $R\rightarrow\infty$,
$R^2e^{2i\theta} - 2iRe^{i\theta} - 2 \rightarrow R^2 \rightarrow \infty$
$|\exp(iRt\cos\theta)| = 1$
$R\exp(-tR\sin\theta) \rightarrow 0$ wenn $0 \leq \theta \leq \pi$ (da $t > 0$ und $\sin\theta > 0$) oder $R\exp(-tR\sin\theta) \rightarrow R$ wenn $\theta = 0, \pi$
$\lim_{R\rightarrow\infty}\int_{C_1}\frac{e^{izt}}{z^2-2iz-2}dz = 0$
b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{izt}}{z^2-2iz-2}dz = \oint_C \frac{e^{izt}}{z^2-2iz-2}dz - \lim_{R\rightarrow\infty}\int_0^\pi \frac{\exp(iRe^{i\theta}t)}{R^2e^{2i\theta}-2iRe^{i\theta}-2}\frac{dz}{d\theta}d\theta$
$= \oint_C \frac{e^{izt}}{(z-1-i)(z+1-i)}dz - \underbrace{\lim_{R\rightarrow\infty}\int_0^\pi \frac{\exp(iRt\cos\theta - tR\sin\theta)}{R^2e^{2i\theta}-2iRe^{i\theta}-2} iRe^{i\theta}d\theta}_{=0}$
$= 2\pi i\ \frac{e^{izt}}{z+1-i}\Big|_{1+i} + 2\pi i\ \frac{e^{izt}}{z-1-i}\Big|_{-1+i} = \pi i e^{i(1+i)t} - \pi i e^{i(-1+i)t} = \pi i e^{-t}(e^{it} - e^{-it}) = -2\pi e^{-t}\sin t$