7. Tutorium **für 11.12.2015**

Die Beispiele sind in TUWEL bis Freitag, 8:00Uhr, anzukreuzen!

7.1 Multiple Choice Fragen

Berechne die Integrale für die Delta-Distribution $\delta(x)$ und die Heaviside-Funktion $H(x)$. (a, b, R und E sind positive Konstanten.)

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(2x) \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2-1) e^x dx$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |xy-1| \delta(x-2y) \delta(x^2-1) dx dy$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} H(4-x^2) dx$

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H\left(R^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy$

f) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(E - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy$

7.2 Cauchyscher Hauptwert

a) Berechne das Integral

$$\int_{C_1} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz$$

im Limes $R \to \infty$. C_1 ist ein oberer Halbkreis mit Radius R in der komplexen Ebene (d.h. $z = Re^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$).

b) Berechne das Integral

$$\int_{C_2} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz$$

im Limes $r \to 0$. C_2 ist ein oberer Halbkreis mit Radius r in der komplexen Ebene (d.h. $z = re^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$).

c) Berechne den Cauchyschen Hauptwert

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{ix}}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1-e^{ix}}{x^2} dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1-e^{ix}}{x^2} dx \right] .$$

d) Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$.

7.3 Delta-Distribution und Heaviside-Funktion

a) Überprüfe durch Anwenden auf eine Testfunktion, ob die folgende Folge $\{f_n\}$ eine Deltafolge für $n \to \infty$ ist:

$$f_n(x) = \frac{n}{2\cosh^2(nx)} \,.$$

b) Berechne das Integral

$$g_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(x')dx'$$

und zeige dass $g_n(x)$ im Limes $n \to \infty$ zur Heaviside-Funktion konvergiert.

7.4 Entwicklung der Delta-Distribution

a) Gegeben seien die orthonormalen Polynome $\{\phi_n(x)|n = 1, 2, 3, \cdots\}$ auf dem Intervall $[a, b]$ (d.h. $\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx = \delta_{nm}$). Nehmen Sie an, dass für $a < t < b$ die Entwicklung der Delta-Distribution mit den Polynomen durch

$$\delta(x - t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x)$$

gegeben. Berechne das Integral $\int_a^b \delta(x - t)\phi_n(x)dx$ und zeige $a_n(t) = \phi_n(t)$.
b) Zeige, für die Funktionen $F(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n\phi_n(x)$ und $\psi_i(x) = \sum_{n=0}^{N} \phi_n(x_i)\phi_n(x)$ $(a < x_i < b)$,

$$\int_a^b F(x)\psi_i(x)dx = F(x_i) \,.$$

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2ab, 2cd, 3ab, 4ab