8. Tutorium **für 18.12.2015**

Die Beispiele sind in TUWEL bis Freitag, 8:00Uhr, anzukreuzen!

8.1 Multiple Choice Fragen

Berechne die Ableitungen und die Integrale für die verallgemeinerten Funktionen ($\delta(x)$: Delta-Distribution, $H(x)$: die Heaviside-Funktion).

a) $\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} + 2\right)(-H(-x)e^x \sin x)$

b) $\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} + 2\right)(-H(-x)e^x \sin x + e^x \sin x)$

c) $\frac{d}{dx}e^{|x|}$

d) $\frac{d^2}{dx^2}e^{|x|}$

e) $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}\delta(x)\right)\sin x dx$

f) $\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\sin x\, dx$ für $f(x) = \begin{cases} \sin(-x) & (-\pi/2 < x < 0) \\ \sin(x) & (0 \leq x < \pi/2) \\ 0 & (|x| \geq \pi/2) \end{cases}$

8.2 Greensche Funktion der Laplace-Gleichung

Zeige, dass die Greensche Funktion der Laplace-Gleichung $\nabla^2 f(\vec{x}) = 0$ in 2 Dimension gegeben ist, durch

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = (2\pi)^{-1} \ln r\,,$$

wobei $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$. Für den Beweis, zeige $\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta^2(\vec{x} - \vec{x}')$ mit den folgenden Schritte:
a) Zeige $\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ für $r > 0$.
b) Zeige $\int_F G(\vec{x}, \vec{x}')dA = 1$ für den Bereich F: $|\vec{x} - \vec{x}'| < R$.

8.3 Greensche Funktion

a) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_t y(t) \equiv \left(\frac{d^2}{dt^2} - 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2 + \gamma^2\right) y(t) = f(t)$$

($\gamma, \omega_0 > 0$). Finde eine Greensche Funktion $G_I(t, t')$, die die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G_I(t, t') = \delta(t - t')$ erfüllt und überprüfe ob $G_I(t, t')$ die Randbedingungen

$$G_I(0, t' > 0) = 0\,, \quad \text{und} \quad G_I'(0, t' > 0) = 0$$

erfüllt ($G_I'(t,t') = \frac{d}{dt}G_I(t,t')$).
b) Finde eine Greensche Funktion, die die homogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G_0(t,t') = 0$ erfüllt und bestimme die Konstante A, sodass die Greensche Funktion $G(t,t') = G_I(t,t') + AG_0(t,t')$ die Randbedingungen

$$G(0, t' > 0) = 0\,, \quad \text{und} \quad G'(0, t' > 0) = 0$$

erfüllt.

Ankreuzbar: 1a-d, 1e-f, 2a, 2b, 3a, 3b