8. Tutorium - Lösungen **18.12.2015**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel zu rechnen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

8.1 Multiple Choice Fragen

a) $\frac{d}{dx}\left(-H(-x)e^x \sin x\right) = \underbrace{\delta(-x)e^x \sin x}_{=0} - H(-x)e^x \sin x - H(-x)e^x \cos x = -H(-x)e^x(\sin x + \cos x)$

$\frac{d^2}{dx^2}\left(-H(-x)e^x \sin x\right) = \delta(-x)e^x(\sin x + \cos x) - H(-x)e^x(\sin x + \cos x) - H(-x)e^x(\cos x - \sin x) = \delta(x) - 2H(-x)e^x \cos x$

$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} + 2\right)\left(-H(-x)e^x \sin x\right) = \delta(-x) - 2H(-x)e^x \cos x + 2H(-x)e^x(\sin x + \cos x) - 2H(-x)e^x \sin x = \delta(x)$

b)

$\frac{d}{dx}\left((1 - H(-x))e^x \sin x\right) = \frac{d}{dx}\left(H(x)e^x \sin x\right)$

Weil $\frac{d}{dx}H(x) = \delta(x)$ und $\frac{d}{dx}(-H(-x)) = \delta(-x) = \delta(x)$, $\frac{d}{dx}\left(H(x)e^x \sin x\right) = \frac{d}{dx}\left(-H(-x)e^x \sin x\right) = \delta(x)$

oder

$\frac{d}{dx}e^x \sin x = e^x(\sin x + \cos x)$

$\frac{d^2}{dx^2}e^x \sin x = 2e^x \cos x$

$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} + 2\right)\left(e^x \sin x\right) = 2e^x \cos x - 2e^x(\sin x + \cos x) + 2e^x \sin x = 0$

$\frac{d}{dx}\left((1 - H(-x))e^x \sin x\right) = \frac{d}{dx}\left(-H(-x)e^x \sin x\right) = \delta(x)$

c)

$\frac{d}{dx}e^{|x|} = \frac{d}{dx}\left(H(x)e^x + H(-x)e^{-x}\right) = \delta(x)e^x + H(x)e^x - \delta(-x)e^{-x} - H(-x)e^{-x} = H(x)e^x - H(-x)e^{-x}$

d)

$\frac{d^2}{dx^2}e^{|x|} = \delta(x) + H(x)e^x + \delta(x) + H(-x)e^{-x} = 2\delta(x) + e^{|x|}$

e)

$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}\delta(x)\right)\sin x dx = \delta(x)\sin x|_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\cos x dx = -1$

f)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= H(\pi/2 + x)H(-x)\sin(-x) + H(\pi/2 - x)H(x)\sin(x) \\
f'(x) &= \delta(\pi/2 + x)H(-x)\sin(-x) - H(\pi/2 + x)\delta(-x)\sin(-x) - H(\pi/2 + x)H(-x)\cos(-x) \\
&\quad -\delta(\pi/2 - x)H(x)\sin(x) + H(\pi/2 - x)\delta(x)\sin(x) + H(\pi/2 - x)H(x)\cos(x) \\
&= \delta(\pi/2 + x) - H(\pi/2 + x)H(-x)\cos(x) - \delta(\pi/2 - x) + H(\pi/2 - x)H(x)\cos(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\sin x dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\pi/2 + x)\sin(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty}H(\pi/2 + x)H(-x)\cos(x)\sin(x)dx \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\pi/2 - x)\sin(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty}H(\pi/2 - x)H(x)\cos(x)\sin(x)dx \\
&= -1 - \int_{-\pi/2}^{0}\cos(x)\sin(x)dx - 1 + \int_{0}^{\pi/2}\cos(x)\sin(x)dx \\
&= -2 - \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{0}\sin(2x)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2}\sin(2x)dx = -1
\end{aligned}
$$

oder

$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\sin x dx = f(x)\sin(x)|_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x dx = \int_{-\pi/2}^{0}\sin(x)\cos x dx - \int_{0}^{\pi/2}\sin(x)\cos x dx = -1$

8.2 Greensche Funktion der Laplace-Gleichung

a) $G(\vec{x}, \vec{x}') = G(|\vec{x} - \vec{x}'|) = G(r)$ wobei $r = |\vec{r}|$ mit $\vec{r} = (x_1 - x_1', x_2 - x_2') = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\frac{\partial}{\partial x_i}G(r) = \frac{\partial r}{\partial x_i}G'(r) = \frac{x_i - x_i'}{r}G'(r) = \frac{x_i - x_i'}{2\pi r^2}$

$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}G(r) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i - x_i'}{r}G'(r)\right) = \frac{1}{r}G'(r) + (x_i - x_i')\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}G'(r)\right) = \frac{1}{r}G'(r) + \frac{(x_i - x_i')^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}G'(r)\right)$

$= \left(\frac{1}{r} - \frac{(x_i - x_i')^2}{r^3}\right)G'(r) + \frac{(x_i - x_i')^2}{r^2}G''(r) = \frac{1}{2\pi r^2} - \frac{(x_i - x_i')^2}{\pi r^4}$

$\nabla^2 G(r) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}G(r) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}G(r) = \left(\frac{2}{r} - \frac{r^2}{r^3}\right)G'(r) + \frac{r^2}{r^2}G''(r) = \frac{1}{r}G'(r) + G''(r) = \frac{1}{2\pi r^2}\frac{1}{r^2} - \frac{1}{2\pi r^4} = 0$

b) $\underbrace{\int_F \nabla^2 G(r) dA = \oint_C \nabla G(r)\cdot \mathbf{n}\, ds}_{\text{Gaußscher Integralsatz}} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos\theta/(2\pi R) \\ \sin\theta/(2\pi R) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} R\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = 1$

$\to \nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}') = \delta^2(\vec{x}-\vec{x}')$

Anmerkung: Wenn die Lösung $G(r) = (2\pi)^{-1}\ln r$ unbekannt ist, kann man trotzdem die Differentialgleichung $\frac{1}{r}G'(r) + G''(r) = 0$ lösen.

Ersetzung: $F(r) = G'(r) \to F'(r) = -F(r)/r \to F(r) = C/r \to G(r) = C\int r^{-1}dr = C\ln r + C'$

Die Konstante, C und C', werden vom Integral in b bestimmt.

8.3 Greensche Funktion

a) Mit dem Einsetzen des Ansatzes $G_I(t,t') = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}_I(\omega)\, e^{i\omega(t-t')}d\omega$ in die Gleichung $\mathcal{L}_t G_I(t,t') = \delta(t-t')$ mit $\mathcal{L}_t = \left(\frac{d^2}{dt^2} - 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2 + \gamma^2\right) \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2 + \gamma^2)\tilde{G}_I(\omega)\, e^{i\omega(t-t')}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')}d\omega$

Vergleich der Integranden $\tilde{G}_I(\omega) = -\frac{1}{\omega^2+2i\gamma\omega-\omega_0^2-\gamma^2} = -\frac{1}{(\omega+\lambda)(\omega-\lambda^*)}$ wobei $\lambda = \omega_0 + i\gamma$ ($\lambda^* = \omega_0 - i\gamma$).

Fourier-Transformation $G_I(t,t') = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega+\lambda)(\omega-\lambda^*)}d\omega$ Zwei Pole liegen in der unteren Halbebene der komplexen Zahlen und kein Pol liegt in der oberen Halbebene. Mit Hilfe des Residuensatzes (Integrationspfad : oberer Halbkreis C_1 für $t > t'$ und unterer Halbkreis C_2 für $t < t'$) ergibt sich

$G_I(t,t') = \frac{1}{2\pi}H(t-t')\left(\oint_{C_1}\tilde{G}_I(\omega)e^{i\omega(t-t')}d\omega - \int_{C_1}\tilde{G}_I(\omega)e^{i\omega(t-t')}d\omega\right)$

$\quad + \frac{1}{2\pi}H(t'-t)\left(-\oint_{C_2}\tilde{G}_I(\omega)e^{i\omega(t-t')}d\omega + \int_{C_2}\tilde{G}_I(\omega)e^{i\omega(t-t')}d\omega\right)$

$= -\frac{1}{2\pi}H(t'-t)\oint_{C_2}\tilde{G}_I(\omega)e^{i\omega(t-t')}d\omega = iH(t'-t)\left[\text{Res}_{\omega\to-\lambda}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega+\lambda)(\omega-\lambda^*)} + \text{Res}_{\omega\to\lambda^*}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega+\lambda)(\omega-\lambda^*)}\right]$

$= H(t'-t)i\left[\frac{e^{-i\omega_0(t-t')}e^{\gamma(t-t')}}{-2\omega_0} + \frac{e^{i\omega_0(t-t')}e^{\gamma(t-t')}}{2\omega_0}\right]$

$= H(t'-t)\frac{e^{-\gamma(t'-t)}}{\omega_0}\frac{e^{i\omega_0(t'-t)} - e^{-i\omega_0(t'-t)}}{2i} = H(t'-t)\frac{e^{-\gamma(t'-t)}}{\omega_0}\sin\left(\omega_0(t'-t)\right)\,.$

Für $t' > 0$, $G_I(0,t') = H(t')\frac{e^{-\gamma t'}}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 t'\right) \neq 0\,.$

Die Greensche Funktion $G_I(t,t')$ erfüllt nicht die Randbedingungen.

b) Homogene Differentialgleichung:

$$\mathcal{L}_t G_0(t,t') = 0$$

Z.B. eine Lösung ist typischerweise $G_I(t,t')$ ohne $H(t'-t)$: $G_0(t,t') = \frac{e^{-\gamma(t'-t)}}{\omega_0}\sin\left(\omega_0(t'-t)\right)$

Anmerkung 1: $G_I(t,t')$ efüllt die homogene Differentialgleichung außer $t = t'$. Ohne $H(t'-t)$ wird die Singularität bei $t = t'$ entfernt.)

Ansatz: $G(t,t') = G_I(t,t') + AG_0(t,t') = H(t'-t)G_0(t,t') + AG_0(t,t') = (H(t'-t) + A)G_0(t,t')\,.$

Randbedingungen: $G(0,t') = (H(t') + A)\frac{e^{-\gamma t'}}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 t'\right)$. Wenn $A = -1$, $G(0,t') = 0$ für $t' > 0$

$\to G(t,t') = G_I(t,t') - G_0(t,t') = (H(t'-t) - 1)\frac{e^{-\gamma(t'-t)}}{\omega_0}\sin\left(\omega_0(t'-t)\right) = H(t-t')\frac{e^{-\gamma(t'-t)}}{\omega_0}\sin\left(\omega_0(t'-t)\right)$

$G(t,t') = (H(t'-t) - 1)G_0(t,t') = H(t-t')G_0(t,t')$

$\to G'(t,t') = \delta(t-t')G_0(t,t') + \gamma H(t-t')G_0(t,t') - \omega_0 H(t-t')\frac{e^{-\gamma(t'-t)}}{\omega_0}\cos\left(\omega_0(t'-t)\right)$

$\to G'(0,t' > 0) = \delta(-t')G_0(0,t') + \gamma H(-t')G_0(0,t') - \omega_0 H(-t')\frac{e^{-\gamma t'}}{\omega_0}\cos\left(\omega_0 t'\right) = 0$

Anmerkung 2: Die Randbedingung $G(0,t' > 0) = 0$ (oder $G(t,t') = 0$ für $t' > t$) ist bekannt als "Kausalität".
$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty}G(t,t')y(t')dt' = \int_{-\infty}^{t}G(t,t')y(t')dt'$, $y(t)$ ist von der Vergangeiheit $y(t')$ mit $t' < t$ bestimmt aber hat keinen Einfluss von der Zukunft $t' > t$.

Anmerkung 3: Allgemein gibt es 2 Lösungen für die (homogene) Differentialgleichung 2. Ordnung.
$\mathcal{L}_t G_0(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2 + \gamma^2)\tilde{G}_0(\omega)\, e^{i\omega(t-t')}d\omega = 0$ gilt für beliebige t und t'

$\to -\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2 + \gamma^2 = 0 \to \omega = \lambda, \lambda^* \to \tilde{G}_0(\omega) = a\delta(\omega-\lambda) + b\delta(\omega-\lambda^*)$

$G_0(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}_0(\omega)\, e^{i\omega(t-t')}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(ae^{i\lambda(t-t')} + be^{i\lambda^*(t-t')}\right) = Ae^{i\lambda(t-t')} + Be^{i\lambda^*(t-t')}$

Z.B. sind die 2 Lösungen $e^{i\lambda(t-t')} = e^{-\gamma(t'-t)}e^{i\omega(t'-t)}$ und $e^{i\lambda^*(t-t')} = e^{-\gamma(t'-t)}e^{-i\omega(t'-t)}$