9. Tutorium - Lösungen **8.1.2016**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel zu rechnen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

9.1 Multiple Choice Fragen

a,b) $a(x)y'' - 2xa(x)y' + 2a(x)y = 0$
Vergleich mit der Sturm-Liouville'sche Gestalt
$\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)\right)y(x) = p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$
$\rightarrow p(x) = a(x), p'(x) = -2xa(x) = -2xp(x), q(x) = 2a(x) = 2p(x) \rightarrow a(x) = p(x) = e^{-x^2}, q(x) = 2e^{-x^2}$
$\left(\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{d}{dx}\right] + 2e^{-x^2}\right)y(x) = 0$
Allgemein $a(x) = Ce^{-x^2}$ mit beliebige Konstante C.
c,d) $xy'' + (1-x)y' + ay = 0$
Sturm-Liouville'sche Gestalt:
$\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + a\rho(x)\right)y(x) = p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + a\rho(x)y(x) = 0$
Vergleich den Koeffizienten
$p'(x)/p(x) = (1-x)/x, a/x = a\rho(x)/p(x) \rightarrow p(x) = \exp(\int \frac{1-x}{x}dx) = xe^{-x}, \rho(x) = p(x)/x = e^{-x}$
e,f)
$\left(\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}\right] + \lambda x\right)y(x) = xy''(x) + y'(x) + \lambda xy(x) = 0$
Ansatz: $w(x) = A(x)y(x)$
$\rightarrow -w''(x) + (v(x) - \lambda)w(x) = -A(x)y''(x) - 2A'(x)y'(x) + (v(x)A(x) - A''(x) - \lambda A(x))y(x) = 0$
$2A'(x)/A(x) = 1/x \rightarrow 2\ln A(x) = \ln x + C_0 \rightarrow A(x) = C\sqrt{x}$
$v(x) = A''(x)/A(x) = -1/(4x^2)$

9.2 Separationansatz

a) Ansatz: $u(x,t) = F(x)G(t)$
$\partial_t F(x)G(t) = \partial_x^2 F(x)G(t) - 2\partial_x F(x)G(t) + F(x)G(t)$
$\rightarrow \frac{1}{G(t)}\partial_t G(t) = \frac{1}{F(x)}\left(\partial_x^2 F(x) - 2\partial_x F(x) + F(x)\right)$
linke Seite: eine Funktion von t, rechte Seite: eine Funktion von x
Die Gleichung gilt für beliebige t und x. $\rightarrow$ Die beide Seiten müssen konstant sein.
$\frac{1}{G(t)}\partial_t G(t) = \frac{1}{F(x)}\left(\partial_x^2 F(x) - 2\partial_x F(x) + F(x)\right) = \lambda$
$\rightarrow \partial_t G(t) = \lambda G(t)$ und $\partial_x^2 F(x) - 2\partial_x F(x) + F(x) = \lambda F(x)$
b) Vergleich mit der Sturm-Liouville'sche Gestalt
$(p(x)F'(x))' + q(x)F(x) = \lambda\rho(x)F(x) \rightarrow p(x)F''(x) + p'(x)F'(x) + q(x)F(x) = \lambda\rho(x)F(x)$
$\rightarrow p'(x) = -2p(x)$, $q(x) = p(x)$, $\rho(x) = p(x) \rightarrow p(x) = q(x) = \rho(x) = e^{-2x}$.
$\rightarrow \left(e^{-2x}F'(x)\right)' + e^{-2x}F(x) = \lambda e^{-2x}F(x)$
c) Liouville'sche Normalform $-w''(t) + (v(t) + \lambda)w(t) = 0$
(Wenn $\mathcal{L}_x F(x) = -\lambda F(x)$, $-w''(t) + (v(t) - \lambda)w(t) = 0$.
Aber wenn $\mathcal{L}_x F(x) = \lambda F(x)$, $-w''(t) + (v(t) + \lambda)w(t) = 0$.)
Ansatz: $w(t) = A(x)F(x)$
$w'(t) = x'(t)(A'(x)F(x) + A(x)F'(x))$
$w''(t) = x''(t)(A'(x)F(x) + A(x)F'(x)) + (x'(t))^2(A''(x)F(x) + 2A'(x)F'(x) + A(x)F''(x))$
$= (x'(t))^2 A(x)F''(x) + (x''(t)A(x) + 2(x'(t))^2 A'(x))F'(x) + (x''(t)A'(x) + (x'(t))^2 A''(x))F(x)$
$\equiv a_2 F''(x) + a_1 F'(x) + a_0 F(x)$

$\rightarrow w''(t) - (v(t) + \lambda)w(t) = a_2 F''(x) + a_1 F'(x) + (a_0 - vA - \lambda A)F(x) = 0$
Vergleich mit $F''(x) - 2F'(x) + (1-\lambda)F(x) = 0$
$a_1 = -2a_2$, $a_2 = a_0 - vA$, und $a_2 = A$
Eine Lösung der letzten Gleichung $a_2 = (x'(t))^2 A(x) = A(x) \rightarrow x'(t) = 1 \rightarrow x(t) = t$
$a_1 = -2a_2 \rightarrow x''(t)A(x) + 2(x'(t))^2 A'(x) = -2(x'(t))^2 A(x) \rightarrow 2A'(x) = -2A(x) \rightarrow A(x) = e^{-x}$
$a_2 = a_0 - vA \rightarrow (x'(t))^2 A(x) = x''(t)A'(x) + (x'(t))^2 A''(x) - v(t)A(x) \rightarrow e^{-x} = e^{-x} - v(x)e^{-x} \rightarrow v(x) = 0$
Die Differentialgleichung in der Liouville'schen Gestalt $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{-x}F(x)\right) = \lambda\left(e^{-x}F(x)\right)$
Lösung:
$e^{-x}F(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \rightarrow F(x) = Ae^{x+\sqrt{\lambda}x} + Be^{x-\sqrt{\lambda}x}$
$F(0) = A + B = 0$, $F'(0) = A(1+\sqrt{\lambda}) + B(1-\sqrt{\lambda}) = 1 \rightarrow A = -B = 1/(2\sqrt{\lambda})$
Wenn $\lambda > 0$, $F(x) = 1/\sqrt{\lambda}e^x \sinh(\sqrt{\lambda}x)$
Wenn $\lambda < 0$, $F(x) = 1/\sqrt{|\lambda|}e^x \sin(\sqrt{|\lambda|}x)$
d) $G(t) = e^{\lambda t}$
Eine Lösung der Differentialgleichung ist für $\lambda > 0$ $u(x,t) = e^{\lambda t}e^x \sinh(\sqrt{\lambda}x)$ oder für $\lambda < 0$ $u(x,t) = e^{\lambda t}e^x \sin(\sqrt{|\lambda|}x)$

9.3 Greensche Funktion

a) inhomogene Differentialgleichung: $G_I''(t,t') - 2iG_I'(t,t') - 5G_I(t,t') = \delta(t-t')$
Fourier-Transformation ($t - t' \rightarrow k$): $\tilde{G}_I(k) = \frac{1}{-k^2+2k-5} = -\frac{1}{(k-1+2i)(k-1-2i)}$
Integrationspfad : oberer Halbkreis C_1 für $t > t'$ und unterer Halbkreis C_2 für $t < t'$
$G_I(t,t') = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}_I(k)e^{ik(t-t')}dk$
$= (2\pi)^{-1}H(t-t')\left(\oint_{C_1}\tilde{G}_I(k)e^{ik(t-t')}dk - \int_{C_1}\tilde{G}_I(k)e^{ik(t-t')}dk\right)$
$+(2\pi)^{-1}H(t'-t)\left(-\oint_{C_2}\tilde{G}_I(k)e^{ik(t-t')}dk + \int_{C_2}\tilde{G}_I(k)e^{ik(t-t')}dk\right)$
Parametrisierung: $k = Re^{i\theta}$
$\rightarrow \tilde{G}_I(k)e^{ik(t-t')}dk = \frac{iRe^{i\theta}e^{iR(t-t')\cos\theta}e^{-R(t-t')\sin\theta}}{-R^2e^{2i\theta}+\lambda^2}d\theta \xrightarrow{R\rightarrow\infty} 0$ wenn $(t-t')\sin\theta > 0$.
$G_I(t,t') = (2\pi)^{-1}H(t-t')\oint_{C_1}\tilde{G}_I(k)e^{ik(t-t')}dk - (2\pi)^{-1}H(t'-t)\oint_{C_2}\tilde{G}_I(k)e^{ik(t-t')}dk$
$= -iH(t-t')\mathrm{Res}_{k\rightarrow 1+2i}\frac{e^{ik(t-t')}}{(k-1+2i)(k-1-2i)} + iH(t'-t)\mathrm{Res}_{k\rightarrow 1-2i}\frac{e^{ik(t-t')}}{(k-1+2i)(k-1-2i)}$
$= -\frac{1}{4}H(t-t')e^{i(1+2i)(t-t')} - \frac{1}{4}H(t'-t)e^{i(1-2i)(t-t')} = -\frac{1}{4}H(t-t')e^{(i-2)t}e^{(-i+2)t'} - \frac{1}{4}H(t'-t)e^{(i+2)t}e^{(-i-2)t'}$
b)
$y_I(t) = \int_{-\infty}^{\infty}G_I(t,t')f(t')dt' = -\frac{1}{4}\int_0^t e^{(i-2)t}e^{(-i+2)t'}e^{ik_0t'}dt' - \frac{1}{4}\int_t^{\infty}e^{(i+2)t}e^{(-i-2)t'}e^{ik_0t'}dt'$
$= -\frac{1}{4}e^{(i-2)t}\int_0^t e^{(-i+ik_0+2)t'}dt' - \frac{1}{4}e^{(i+2)t}\int_t^{\infty}e^{(-i+ik_0-2)t'}dt' = -\frac{1}{4}e^{(i-2)t}\frac{e^{(-i+ik_0+2)t}-1}{-i+ik_0+2} + \frac{1}{4}e^{(i+2)t}\frac{e^{(-i+ik_0-2)t}}{-i+ik_0-2}$
$= \frac{1}{4}e^{(i-2)t}\frac{i(k_0-1)-2}{-k_0^2+2k_0-5} - \frac{1}{4}e^{ik_0t}\frac{i(k_0-1)-2}{-k_0^2+2k_0-5} + \frac{1}{4}e^{ik_0t}\frac{i(k_0-1)+2}{-k_0^2+2k_0-5} = \frac{1}{4}\frac{1}{-k_0^2+2k_0-5}\left((i(k_0-1)-2)e^{(i-2)t} + 4e^{ik_0t}\right)$
$y_I(0) = \frac{1}{4}\frac{i(k_0-1)+2}{-k_0^2+2k_0-5} \neq 0$
c) homogene Differentialgleichung: $G_0''(t,t') - 2iG_0'(t,t') - 5G_0(t,t') = 0$
Greensche Funktion: $\tilde{G}_0(k) = a\delta(k-1+2i) + b\delta(k-1-2i)$
$\rightarrow G_0(t,t') = Ae^{i(t-t')-2(t-t')} + Be^{i(t-t')-2(t'-t)}$ $\quad (A,B = a/(2\pi), b/(2\pi))$
$y_1(t) = \int_0^{\infty}e^{i(t-t')-2(t-t')}e^{ik_0t'}dt'$
$\rightarrow y_1(0) = \int_0^{\infty}e^{i(k_0-1)t'+2t'}dt' = \infty$
$y_2(t) = \int_0^{\infty}e^{i(t-t')-2(t'-t)}e^{ik_0t'}dt' = e^{2it+t}\int_0^{\infty}e^{i(k_0-1)t'-2t'}dt'$
$\rightarrow y_2(0) = \int_0^{\infty}e^{i(k_0-1)t'-2t'}dt' = \frac{1}{2-i(k_0-1)} = \frac{2+i(k_0-1)}{k_0^2-2k_0+5} = -4y_I(0)$
$y(t) = y_I(t) + \frac{1}{4}y_2(t) \rightarrow y(0) = 0$
$y'(0) = \frac{1}{4}\frac{1}{-k_0^2+2k_0-5}\left((i(k_0-1)-2)(i-2) + 4ik_0 - (i+2)(2+i(k_0-1))\right) = 0$