Name: Tutoriumsgruppe: Matr. Nr.:

Anzahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

1. Test, 2. 12. 2016, 2016W

1 Rechenbeispiele (30 Punkte)

(5 Punkte pro Frage)

1) Vereinfachen und berechnen Sie $\partial_i(x^i\sqrt{x^j x_j})$ für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik.

2) Berechnen Sie $(\partial_i x^i)(\partial_j x^j) + (\partial_i x^j)(\partial_j x^i)$ in 3 Dimensionen.

3) Berechnen Sie die dualen Vektoren zur Basis

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4) Berechnen Sie den Kommutator $[\sigma_x, \sigma_y]$ für die Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Berechnen Sie $\det(\mathbf{X})$ wobei $\mathbf{X} = (x^i{}_j) = (g^{ik} g_{kj})$.

6) Berechnen Sie für einen Einheitskreis C um den Ursprung das Integral

$$\oint_C \frac{z}{2z+1} dz.$$

BITTE WENDEN

2 Spektraltheorem (30 Punkte)

a) Berechnen Sie die Eigenwerte, λ_1 und λ_2 ($\lambda_2 > \lambda_1$), und die normierten Eigenvektoren, $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$, der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

b) Schreiben Sie die Lösung $\mathbf{x}(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

mit der Randbedingung $\mathbf{x}(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ an und berechnen Sie die Elemente des Vektors $\mathbf{x}(t)$.

3 Lokale Transformation (40 Punkte)

In einer kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ist eine infinitesimale Änderung des Vektors $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$ durch $\mathbf{dx} = dx^i\mathbf{e}_i$ gegeben.
a) Mit den Zylinderkoordinaten $(x'^1, x'^2, x'^3) = (\rho, \theta, z)$ und der entsprechenden Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ wird die infinitesimale Änderung in die Form $\mathbf{dx} = dx'^i\mathbf{e}'_i$ umgeschrieben. Berechnen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ zwischen den Basisvektoren wobei $\mathbf{T}$ durch $\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}\mathbf{T}$ definiert ist. Die Koordinatentransformation ist durch $(x^1, x^2, x^3) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$ gegeben.
b) Berechnen Sie die metrischen Tensoren $\mathbf{g}' = (g'_{ij})$ und $\mathbf{g}'^* = (g'^{ij})$ der Zylinderkoordinaten.
c) V sei ein Zylinder mit Radius R und Höhe h (> 0), d.h. $V = \{(\rho, \theta, z) | 0 \le \rho \le R, 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le z \le h\}$. F sei seine Oberfläche, die aus der Mantelfläche $F_1 = \{(\rho, \theta, z) | \rho = R, 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le z \le h\}$, der Deckfläche $F_2 = \{(\rho, \theta, z) | 0 \le \rho \le R, 0 \le \theta < 2\pi, z = h\}$ und der Grundfläche $F_3 = \{(\rho, \theta, z) | 0 \le \rho \le R, 0 \le \theta < 2\pi, z = 0\}$ besteht. Berechnen Sie das infinitesimale Volumenelement dV und das infinitesimale Flächenelement $d\mathbf{F}_i$ (in Vektorform) für $i = 1, 2, 3$ mit den Zylinderkoordinaten.
d) Berechnen Sie für ein Vektorfeld $\mathbf{w} = xy\mathbf{e}_1 - y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ das Integral

$$\int_F \mathbf{w} \cdot d\mathbf{F} .$$
