Name: Tutoriumsgruppe: Matr. Nr.:
Anzahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

2. Test, 20. 1. 2017, 2016W

1 Rechenbeispiele (30 Punkte)

(6 Punkte pro Frage)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(1-2x)dx$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} H(1-x^2)dx$ ($H(x)$: Heaviside-Funktion)

3) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx$

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\sin x\,dx \quad \left(f(x) = \begin{cases} \sin|x| & (|x| \leq \pi/2) \\ 0 & (|x| > \pi/2) \end{cases} \right)$

Die Differentialgleichung $(1-x)y'' + 2x(x-1)y' + 2y = 0$ wird in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)\right) y(x) = 0$ transformiert.

5) Bestimmen Sie $p(x)$ und $q(x)$.

Hinweise: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $z! = \Gamma(z+1)$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$

BITTE WENDEN

2 Greensche Funktion (35 Punkte)

a) Finden Sie eine Greensche Funktion $G(t,t')$, die die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t-t')$ erfüllt. Der Operator $\mathcal{L}_t$ ist durch

$$\mathcal{L}_t y(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \gamma^2 + \Omega^2\right) y(t)$$

($\gamma > 0$) definiert.
b) Lösen Sie die Differentialgleichung $\mathcal{L}_t y(t) = f(t)$ für $f(t) = e^{i\omega_0 t} H(t)$ mit den Randbedingungen $y(t=0) = 0$ und $y'(t=0) = 0$.
($H(t)$: Heaviside-Funktion)

3 Differentialgleichung (35 Punkte)

a) Führen Sie den Separationsansatz der Differentialgleichung

$$y^2\left(\partial_x^2 - \partial_x\right)\Phi(x,y) + \frac{1}{x}\left(y^2\partial_x + \partial_y^2\right)\Phi(x,y) = 0$$

in (x,y)-Koordinaten und zeigen Sie, dass die Differentialgleichung in der x-Koordinate durch $xu''(x) + (1-x)u'(x) + \lambda u(x) = 0$ gegeben ist (λ : Konstante). Schreiben Sie auch die Differentialgleichung in der y-Koordinate an.
b) Verwenden Sie den Ansatz $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$ ($a_0 \neq 0$) und bestimmen Sie den charakteristischen Exponent σ.
c) Schreiben Sie die Rekursionsgleichung der Koeffizienten a_n an.
d) Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung in der x-Koordinate für $\lambda = 2$.