2. Test - Lösungen **20.1.2017**

1 Rechenbeispiele [30 Punkte, 6 Punkte je Frage]

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(1-2x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}$
oder
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(1-2x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(x-1/2)dx = \frac{1}{2}$
2) $\int_{-\infty}^{\infty} H(1-x^2)dx = \int_{-1}^{1} dx = 2$
3) $\int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} t^2 e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{3/2} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}$
4) $\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\sin x\, dx = f(x)\sin x|_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\cos x\, dx = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin|x|\,\cos x\, dx$
$= -2\int_0^{\pi/2} \sin x\,\cos x\, dx = -1$
oder
$f(x) = H(x)H(\pi/2-x)\sin x - H(-x)H(\pi/2+x)\sin x$
$\to f'(x) = \delta(x)H(\pi/2-x)\sin x - H(x)\delta(\pi/2-x)\sin x + H(x)H(\pi/2-x)\cos x$
$+\delta(-x)H(\pi/2+x)\sin x - H(-x)\delta(\pi/2+x)\sin x - H(-x)H(\pi/2+x)\cos x$
$= -H(x)\delta(\pi/2-x) + H(x)H(\pi/2-x)\cos x + H(-x)\delta(\pi/2+x) - H(-x)H(\pi/2+x)\cos x$
$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\sin x dx = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\delta(\pi/2-x)\sin x dx + \int_{-\infty}^{\infty} H(x)H(\pi/2-x)\cos x\sin x dx$
$+\int_{-\infty}^{\infty} H(-x)\delta(\pi/2+x)\sin x dx - \int_{-\infty}^{\infty} H(-x)H(\pi/2+x)\cos x\sin x dx = -1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = -1$
5)Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'sche Gestalt:
$p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$
Koeffizientenvergleich: $p'(x)/p(x) = -2x \to p(x) = Ce^{-2\int x dx} = Ce^{-x^2}$
$q(x)/p(x) = 2/(1-x) \to q(x) = 2p(x)/(1-x) = 2Ce^{-x^2}/(1-x)$

2 Greensche Funktion [35 Punkte]

a) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma\frac{dy}{dt} + \gamma^2 + \Omega^2 y = 0$
Ansatz : $G_I(t,t') = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_I(\omega)\, e^{i\omega(t-t')}d\omega$
Inhomogene Gleichung: $\mathcal{L}_t G_I(t,t') = \delta(t-t') \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-\omega^2+2i\gamma+\gamma^2+\Omega^2)\tilde{G}_I(\omega)\, e^{i\omega(t-t')}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')}d\omega$
Vergleich der Integranden: $\tilde{G}_I(\omega) = \frac{1}{-\omega^2+2i\gamma\omega+\gamma^2+\Omega^2} = -\frac{1}{(\omega-\Omega-i\gamma)(\omega+\Omega-i\gamma)}$
Fourier-Transformation $G_I(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega-\Omega-i\gamma)(\omega+\Omega-i\gamma)}d\omega$
Zwei Pole $\omega = \pm\Omega + i\gamma$ liegen in der oberen Halbebene. Da das Integral entlang des oberen offenen Halbkreises im Limes $R \to \infty$ gegen null konvergiert, wird das Integral entlang der reellen Achse gleich als das Integral entlang des oberen geschlossenen Halbkreises, das mit dem Residuensatz berechnet werden kann:
$G_I(t,t') = -iH(t-t')\mathrm{Res}_{\omega\to\Omega+i\gamma}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega-\Omega-i\gamma)(\omega+\Omega-i\gamma)} - iH(t-t')\mathrm{Res}_{\omega\to-\Omega+i\gamma}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega-\Omega-i\gamma)(\omega+\Omega-i\gamma)}$
$= -iH(t-t')\frac{e^{(i\Omega-\gamma)(t-t')}}{2\Omega} + iH(t-t')\frac{e^{(-i\Omega-\gamma)(t-t')}}{2\Omega} = H(t-t')\frac{1}{2\Omega}e^{-\gamma(t-t')}(-i)\left(e^{i\Omega(t-t')} - e^{-i\Omega(t-t')}\right)$
$= H(t-t')\frac{1}{\Omega}e^{-\gamma(t-t')}\sin\left(\Omega(t-t')\right)$
b) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t,t')f(t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt' H(t-t')\frac{1}{\Omega}e^{-\gamma(t-t')}\sin\left(\Omega(t-t')\right)H(t')e^{i\omega_0 t'}$
Wenn $t < 0$, $y(t) = 0$.
Wenn $t \geq 0$,
$y(t) = \frac{1}{2i\Omega}\int_0^t dt'\left[e^{-\gamma(t-t')+i\Omega(t-t')+i\omega_0 t'} - e^{-\gamma(t-t')-i\Omega(t-t')+i\omega_0 t'}\right]$
$= \frac{1}{2i\Omega}\left[\frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-\gamma t+i\Omega t}}{\gamma-i\Omega+i\omega_0} - \frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-\gamma t-i\Omega t}}{\gamma+i\Omega+i\omega_0}\right]$
$y(t=0) = 0$ und $y'(t=0) = 0$

3 Differentialgleichung [35 Punkte]

a) $y^2\left(\partial_x^2 - \partial_x\right)\Phi(x,y) + \frac{1}{x}\left(y^2\partial_x + \partial_y^2\right)\Phi(x,y) = 0$
Ansatz : $\Phi(x,y) = u(x)v(y)$
Differentialgleichung:

$y^2 u''(x)v(y) + (y^2/x - y^2)u'(x)v(y) + \frac{1}{x}u(x)v''(y) = 0$
$\rightarrow y^2 \frac{u''(x)}{u(x)} + (y^2/x - y^2)\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{1}{x}\frac{v''(y)}{v(y)} = 0$
$\rightarrow x\frac{u''(x)}{u(x)} + (1-x)\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{1}{y^2}\frac{v''(y)}{v(y)} = 0$
$\rightarrow -x\frac{u''(x)}{u(x)} - (1-x)\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{y^2}\frac{v''(y)}{v(y)} = \lambda$ (Konstante)
$-x\frac{u''(x)}{u(x)} - (1-x)\frac{u'(x)}{u(x)} = \lambda$ und $\frac{1}{y^2}\frac{v''(y)}{v(y)} = \lambda$
$\rightarrow xu''(x) + (1-x)u'(x) + \lambda u = 0$, $v''(y) = \lambda y^2 v(y)$
b) Ansatz: $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$
Differentialgleichung:
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)x^{n+\sigma-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda x^{n+\sigma} = 0$
$\rightarrow a_0(\sigma(\sigma-1)+\sigma)x^{\sigma-1}$
$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n((n+\sigma)(n+\sigma-1)+(n+\sigma))x^{n+\sigma-1} + a_{n-1}(-(n+\sigma-1)+\lambda)\right]x^{n+\sigma-1} = 0$
Die Gleichung gilt für beliebiges $x \rightarrow$ Alle Koeffizienten der Terme mit $x^{n+\sigma}$ müssen null sein.
$x^{\sigma-1}$ Term : $a_0(\sigma(\sigma-1)+\sigma) = 0 \rightarrow \sigma = 0$ (weil $a_0 \neq 0$)
c) $x^{n+\sigma-1}$ Term : $a_n(n(n-1)+n)x^{n+\sigma-1} + a_{n-1}(-n+1+\lambda) \rightarrow a_n = -\frac{\lambda+1-n}{n^2}a_{n-1}$
d) Wenn $\lambda = 2$, $a_n = -\frac{3-n}{n^2}a_{n-1}$
$a_1 = -2a_0$, $a_2 = -\frac{1}{4}a_1 = \frac{1}{2}a_0$, $a_3 = 0$, $a_4 = \frac{1}{16}a_3 = 0$, $\cdots$, $a_n = 0$ $(n \geq 3)$
$u(x) = a_0(1 - 2x + \frac{1}{2}x^2)$