

10. Tutorium

für 13.1.2017

10.1 Gamma-Funktion

- a) Zeige $|(ix)!|^2 = \frac{\pi x}{\sinh(\pi x)}$
- b) Berechne das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} (\pi)^{-3/2} e^{-x^2 - y^2 - z^2} dx dy dz$
- c) Berechne das Integral $\int_a^{\infty} e^{2ax - x^2} dx$.
- d) Zeige $\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma((n+1)/2)}{2 \Gamma(n/2 + 1)}$
- e) Schreibe das Integral aus d) mithilfe der Beta-Funktion um.

Hinweise:

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $z! = \Gamma(z+1)$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$,
 $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$, $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$

10.2 Diffusionsgleichung

Betrachte eine Diffusionsgleichung

$$\left(\partial_t - \frac{1}{2}D\partial_x^2\right)y(t, x) = f(t, x).$$

- a) Berechne die Greensche Funktion $G(t, t'; x, x')$, die die inhomogene Gleichung $(\partial_t - \frac{1}{2}D\partial_x^2)G = \delta(t-t')\delta(x-x')$ erfüllt.
- b) Finde eine Lösung der Diffusionsgleichung für $f(t, x) = \delta(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$.

10.3 Frobenius-Methode

Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$4xy''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0.$$

- a) Verwende den Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$ ($a_0 \neq 0$) und bestimme die charakteristischen Exponenten σ .
- b) Schreibe für jeden Wert σ die Rekursionsgleichung der Koeffizienten a_n an und löse die Rekursionsgleichung. Schließlich schreibe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

Ankreuzbar: 1a-c, 1de, 2a, 2b, 3a, 3b

Ein kurzer Ausblick auf zukünftige Semester: In allen Fächern der Physik werden viele Phänomene von Differentialgleichungen beschrieben. Die Eigenschaften der Differentialgleichungen werden im Rahmen des Sturm-Liouville-Problems, und des Separationsansatzes analysiert und die Greensche Funktion ist eine praktische Methode, um die Lösungen zu finden. Das Eigenwertproblem und das Spektraltheorem tauchen oft insbesondere in Quantentheorie (5. Sem) und Statistischer Physik (6. Sem) auf. Legendre-Polynome, Delta Distribution, Heaviside Funktion und andere spezielle Funktionen werden in Elektrodynamik (4. Semester) und Quantentheorie wiederkehren. Sie sind wichtige Grundlagen auch für numerische Rechnungen (wie z.B Gauß-Quadratur). Ko- und kontravariante Schreibweise werden in Elektrodynamik I & II für die spezielle Relativitätstheorie gebraucht. Die duale Basis erscheint in Form des reziproken Gitters in der Festkörperphysik (6. Sem). Die Gamma-Funktion wird in Statistischer Physik (6. Sem) eine wichtige Rolle spielen. Somit sollten die "Mathematischen Methoden" eine wichtige Grundlage für künftige theoretische Vorlesungen bieten.