1. Tutorium **für 14.10.2016**

Informationen zu den Übungen

- Die Beispiele sind online in TUWEL bis Freitag, 00:00, anzukreuzen! Eine spätere Änderung der Kreuze ist nicht mehr möglich.

- Die Anzahl der angekreuzten Beispiele geht in die Endnote ein. Mindestens 50% aller Beispiele müssen angekreuzt werden, aber je mehr, desto besser. Die Tafelleistung wird mit „OK“ oder „nicht vorbereitet“ bewertet. In letzterem Fall werden alle Kreuze des Tages gestrichen. Zum Bestehen der Übung ist mindestens eine positive Tafelleistung notwendig. Sieh die Übung als gute Gelegenheit, Unklarheiten bei den Beispielen zu klären. Nütze die Gelegenheit, um Fragen zu stellen!

- Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

- In dieser Übung werden mathematische Grundlagen vermittelt, die später vor allem in „Elektrodynamik“ und „Quantentheorie“ zur Anwendung kommen, aber auch in anderen Vorlesungen und Übungen nützlich sein werden. Es zahlt sich also aus, von Anfang an eifrig mitzuarbeiten! :)

1.1 Lineare Algebra

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechne die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$.
b) Berechne die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}^2$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Berechne die Spur $\mathrm{Sp}(\mathbf{AB})$
d) Berechne die Spur $\mathrm{Sp}(\mathbf{BA})$.

e) Berechne die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ für die Matrix $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2 Lineare Unabhängigkeit

a) Gegeben sei, dass die Familie $\mathcal{S} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ von Vektoren,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

einen Vektorraum $\mathcal{V}$ aufspannt (d.h.$\mathcal{V} = \mathrm{span}(\mathcal{S})$). Ist die Familie $\mathcal{S}$ linear abhängig oder unabhängig?
b) Gegeben sei, dass die Familie $\mathcal{P} = \{p(x), q(x), r(x)\}$ von Polynomen,

$$p(x) = x^2 + x, \quad q(x) = 3x^2 + 2x + 1, \quad r(x) = x^2 + 2x + 2,$$

einen Vektorraum $\mathcal{V}$ aufspannt (d.h.$\mathcal{V} = \mathrm{span}(\mathcal{P})$). Ist die Familie $\mathcal{P}$ linear abhängig oder unabhängig?

1.3 Transformationsmatrix

Die Koordinaten eines Vektors $\mathbf{r}$ ist in einem kartesischen Koordinatensystem durch $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben (oder $\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2$ mit den Basisvektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$). Der Vektor $\mathbf{r}$ wird entlang der X-Achse um den Faktor 2 und entlang der Y-Achse um den Faktor 1/2 zu einem neuen Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{neu}}$ skaliert. (X, Y) ist ein neues Koordinatensystem, das durch $X = x - y$ und $Y = x + y$ definiert wird.
a) Schreibe die Einheitsvektoren $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ entlang den X und Y Achsen an.
b) Berechne die Koordinaten des Vektors $\mathbf{r}$ bezüglich der neuen Basisvektoren $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ (d.h., berechne (x', y') in $\mathbf{r} = x'\mathbf{e}'_1 + y'\mathbf{e}'_2$.)
c) Berechne den neuen Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{neu}}$.
d) Berechne die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ bezüglich der Basisvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ wobei $\mathbf{r}_{\mathrm{neu}} = \mathbf{T}\,\mathbf{r}$.

Ankreuzbar: 1ab, 1c-e, 2a, 2b, 3a-c, 3d