**1. Tutorium - Lösungen** **14.10.2016**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

## 1.1 Lineare Algebra

a) Eigenvektor : $\mathbf{x}$, Eigenwert: $\lambda \to$ Eigenwertgleichung : $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ oder $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$
Wenn $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, gibt es Lösungen $\mathbf{x} \neq 0$.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 2) = 0 \to \lambda = 0, \pm\sqrt{2}$$

Alternative Lösung:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x+z \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{cases} y = \lambda x \\ x + z = \lambda y \\ y = \lambda z \end{cases} \text{(Ersetzung:} y = \lambda x) \to \begin{cases} y = \lambda x \\ x + z = \lambda^2 x \\ \lambda x = \lambda z \end{cases}$$

$\lambda x = \lambda z \to \lambda = 0$ oder $x = z$
Wenn $\lambda = 0$, $(x, y, z) = C(1, 0, -1)$ ($C$: Konstante).
Wenn $x = z$, $2x = \lambda^2 x \to \lambda = \pm\sqrt{2}$ mit $(x, y, z) = C(1, \pm\sqrt{2}, 1)$ ($C$: Konstante).
$\lambda = 0, \pm\sqrt{2}$
b) Wenn $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \lambda\mathbf{Ax} = \lambda^2\mathbf{x}$.
Die Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ sind auch die Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}^2$ und die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}^2$ sind $\lambda^2 = 0, 2$.

c) $$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & -6 \end{pmatrix} \to \mathrm{Sp}(\mathbf{AB}) = 6 + 0 - 6 = 0$$

d) $$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \mathrm{Sp}(\mathbf{BA}) = -1 + 0 + 1 = 0$$

e) $\mathbf{A}$ ist die Drehmatrix für eine Drehung um $-\pi/4$ rad. Die Inverse ist die Drehmatrix für eine Drehung um $\pi/4$ rad, d.h. $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Alternative Lösung: Wenn $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ist die Inverse $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

## 1.2 Lineare Unabhängigkeit

a) Wenn die Gleichung $a^1\mathbf{x}_1 + a^2\mathbf{x}_2 + a^3\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \mathbf{X}\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = 0$ eine einzige Lösung $a^i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ hat, ist die Familie $\mathcal{S} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ linear unabhängig. Die Bedingung für lineare Unabhängigkeit ist deshalb die Existenz der inversen Matrix $\mathbf{X}^{-1}$, d.h. $\det\mathbf{X} \neq 0$.
$\det\mathbf{X} = -4 + 6 + 0 - (-2 + 0 + 4) = 0 \to$ Die Familie ist linear abhängig.
Z.B. : $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1 + (1/2)\mathbf{x}_2$
b) Wenn $a^1 p(x) + a^2 q(x) + a^3 r(x) = 0$ eine einzige Lösung $a^i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ hat, ist die Familie $\mathcal{P}$ linear unabhängig.

$a^1 p(x) + a^2 q(x) + a^3 r(x) = a^1(x^2 + x) + a^2(3x^2 + 2x + 1) + a^3(x^2 + 2x + 2)$
$= (a^1 + 3a^2 + a^3)x^2 + (a^1 + 2a^2 + 2a^3)x + (a^2 + 2a^3)$
Die Bedingungen für $a^1 p(x) + a^2 q(x) + a^3 r(x) = 0$ für beliebige $x$ sind

$$\begin{pmatrix} a^1 + 3a^2 + a^3 \\ a^1 + 2a^2 + 2a^3 \\ a^2 + 2a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 + 1 + 0 - (0 + 6 + 2) = -3$$

Deshalb ist $a^i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ die einzige Lösung.
Die Familie der Polynomen ist linear unabhängig.

## 1.3 Transformationsmatrix

a) $(x, y)$ sind die Koordinaten in der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ und $(x', y')$ in der Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$. $\to x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 = x'\mathbf{e}'_1 + y'\mathbf{e}'_2$
Wenn $Y = x + y = 0$ (oder $y = -x$), ist der Vektor parallel zur $X$-Achse (d.h. $y' = 0$) : $x\,\mathbf{e}_1 - x\,\mathbf{e}_2 = x'\mathbf{e}'_1$
$\mathbf{e}'_1$ ist parallel zur $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Mit dem Normierungsfaktor $\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
In ähnlicher Weise $\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Anmerkung: Es gibt viele Anwendungen vom $(X, Y) = (x - y, x + y)$ Koordinatensystem.
z.B.) $f(x)$: Punkteverteilung des 1. Tests, $g(y)$: Punteverteilung des 2. Tests
$\to$ Die Verteilung der gesamten Punkte (Koordinatentransformation von $(x, y)$ zum $(X, Y)$) :
$h(Y = x + y) = \int f(x) g(y = Y - x) dx$ (Integral entlange der $X$-Achse)
ein anderes Beispiel : Schwerpunkts- und Relativkoordinaten $((x + y)/2, x - y)$ für 2 Teilchen mit einer gleichen Masse.

b) $\mathbf{r} = x'\mathbf{e}'_1 + y'\mathbf{e}'_2 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{r_{neu}} = 2x'\mathbf{e}'_1 + \frac{1}{2}y'\mathbf{e}'_2 = -\frac{2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix} x'_{\text{neu}} \\ y'_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_{\text{neu}} \\ y'_{\text{neu}} \end{pmatrix}$

$$\to \mathbf{r_{neu}} = \begin{pmatrix} x_{\text{neu}} \\ y_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_{\text{neu}} \\ y'_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}$$

Transformationsmatrix: $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$
Anmerkung: $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ sind die Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{T}$ mit den Eigenwerten, 2 und 1/2.