2. Tutorium **für 21.10.2016**

2.1 Indexschreibweise

In einer orthonormalen Basis werden der Vektor $\mathbf{x}$ und die Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, und $\mathbf{C}$ mit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

und

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

dargestellt.
a) Schreibe in Indexschreibweise die i-te Komponente des Vektors $\mathbf{A}\,\mathbf{x}$ mit der Einsteinschen Summenkonvention.
b) Schreibe in Indexschreibweise die i-te Komponente des Vektors $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T$.
c) Schreibe in Indexschreibweise $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T\mathbf{C})$.
d) Schreibe in Indexschreibweise $\mathrm{Sp}(\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$.
e) Schreibe in Matrixform $a_{lj}b_{ik}c_{lk}$.
f) Schreibe in Matrixform $a_{ii}b_{jj}c_{kk}$.

2.2 Transformation auf nicht-orthogonale Basis

Die Koordinaten eines Vektors $\mathbf{x}$ sind in einer orthonormalen Basis, $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, durch $\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ gegeben. Der Vektor soll in einer nicht-orthogonalen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ dargestellt werden. Die neuen Basisvektoren sind durch $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{f}_2 = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ definiert.
a) Gegeben sei $(x^1, x^2) = (1, 2)$. Berechne die Koordinaten (x'^1, x'^2) des Vektors $\mathbf{x}$ bezüglich der neuen Basisvektoren $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$, für die gilt $\mathbf{x} = x'^1\mathbf{f}_1 + x'^2\mathbf{f}_2$.
b) Die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ zwischen den zwei Darstellungen ist durch $\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ definiert. Wie ist die Beziehung zwischen den Matrizen $\mathbf{T}$ und $\mathbf{F}$? $\mathbf{F}$ ist die Matrix mit den Basisvektoren $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ in Spalten, d.h. $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2)$.
c) Berechne das Skalarprodukt $(x'^1\mathbf{f}_1 + x'^2\mathbf{f}_2)^T \cdot (x'^1\mathbf{f}_1 + x'^2\mathbf{f}_2)$ und schreibe das Ergebnis in Abhängigkeit nur von x'^1 und x'^2 an.
Anmerkung : für die nicht-orthogonale Basis $\mathbf{f}_1^T \cdot \mathbf{f}_2 \neq 0$.

2.3 Duale Basis (Fortsetzung von 2.2)

Die duale Basis $\{\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*\} := \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ wird über $[\mathbf{f}_i^*, \mathbf{f}_j] = \mathbf{f}_i^* \cdot \mathbf{f}_j = \delta_{ij}$ bzw. $[\mathbf{f}^i, \mathbf{f}_j] = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \delta_j^i$ definiert.
a) Bestimme die dualen Basisvektoren $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ zur orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
b) Bestimme die dualen Basisvektoren $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ zur nicht-orthogonalen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.
c) Wie ist die Beziehung zwischen den Matrizen $\mathbf{T}^*$ und $\mathbf{F}^*$ wobei
$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \mathbf{T}^*$ und $\mathbf{F}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix}$ (duale Basisvektoren in Zeilen)?
d) Berechne, für $x^1 = 1$ und $x^2 = 2$, die Koordinaten des Vektors $\mathbf{x}$ in den dualen Räumen, d.h. (x_1, x_2) in $\mathbf{x}^T = x_1\mathbf{e}^1 + x_2\mathbf{e}^2$ und (x_1', x_2') in $\mathbf{x}^T = x_1'\mathbf{f}^1 + x_2'\mathbf{f}^2$.
e) Wie ist die Beziehung zwischen den Matrizen $\mathbf{F}$ (aus Bsp.2.2b) und $\mathbf{F}^*$?
f) Berechne das Skalarprodukt $(x_1'\mathbf{f}^1 + x_2'\mathbf{f}^2) \cdot (x'^1\mathbf{f}_1 + x'^2\mathbf{f}_2)$ in der dualen Basis. Verwende das Ergebnis x'^i aus Bsp. 2.2a und x_i' aus Bsp. 2.3d.
g) Zeige $x_i' x'^i = x_i x^i$ für beliebige Vektoren $\mathbf{x}$.

Ankreuzbar: 1a-f, 2ab, 2c, 3ab, 3c-e, 3fg