2. Tutorium - Lösungen **21.10.2016**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

2.1 Indexschreibweise

a) $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j}x_j \\ \sum_j a_{2j}x_j \\ \sum_j a_{3j}x_j \end{pmatrix} \rightarrow (\mathbf{A}\,\mathbf{x})_i = \sum_j a_{ij}x_j = a_{ij}x_j$

b) $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j}x_j & a_{2j}x_j & a_{3j}x_j \end{pmatrix} \rightarrow (\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T)_i = a_{ij}x_j$

Anmerkung: In Indexschreibweise gibt es keinen Unterschied zwischen $\mathbf{Ax}$ und $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T$.

c) $\mathrm{Sp}(\mathbf{AB}^T\mathbf{C}) = (\mathbf{AB}^T\mathbf{C})_{ii} = (\mathbf{A})_{ij}(\mathbf{B}^T)_{jk}(\mathbf{C})_{ki} = a_{ij}b_{kj}c_{ki}$

d) $\mathrm{Sp}(\mathbf{CAB}^T) = (\mathbf{CAB}^T)_{ii} = (\mathbf{C})_{ij}(\mathbf{A})_{jk}(\mathbf{B}^T)_{ki} = c_{ij}a_{jk}b_{ik}$

Anmerkung : Der doppelt auftretende Index kann umbenannt werden, z.B.: $c_{ij}a_{jk}b_{ik} = c_{ki}a_{ij}b_{kj}$. Das fühlt zu $\mathrm{Sp}(\mathbf{AB}^T\mathbf{C}) = \mathrm{Sp}(\mathbf{CAB}^T)$ (siehe Bsp.1.1c und 1.1d).

e) $a_{lj}b_{ik}c_{lk} = a_{lj}(\mathbf{BC}^T)_{il} = (\mathbf{BC}^T)_{il}a_{lj} = (\mathbf{BC}^T\mathbf{A})_{ij}$ oder $(\mathbf{A}^T\mathbf{CB}^T)_{ji}$

f) $a_{ii}b_{jj}c_{kk} = \mathrm{Sp}(\mathbf{A})\mathrm{Sp}(\mathbf{B})\mathrm{Sp}(\mathbf{C})$

2.2 Transformation auf nicht-orthogonale Basis

a) Die nicht-orthogonale Basis : $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = x'^1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x'^2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}$

Wenn $x^1 = 1$ und $x^2 = 2$, $\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = x'^1\mathbf{f}_1 + x'^2\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1}$

Anmerkung: Wenn die Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ linear unabhängig ist, existiert die Inverse $\mathbf{F}^{-1}$ (siehe Bsp.1.2).

c) $(x'^1\mathbf{f}_1 + x'^2\mathbf{f}_2)^T \cdot (x'^1\mathbf{f}_1 + x'^2\mathbf{f}_2) = x'^1x'^1\mathbf{f}_1^T \cdot \mathbf{f}_1 + x'^1x'^2\mathbf{f}_1^T \cdot \mathbf{f}_2 + x'^2x'^1\mathbf{f}_2^T \cdot \mathbf{f}_1 + x'^2x'^2\mathbf{f}_2^T \cdot \mathbf{f}_2$
$= 5x'^1x'^1 + 14x'^1x'^2 + 10x'^2x'^2$

Anmerkung: Wenn $x'^1 = -7$ und $x'^2 = 5$ (siehe Bsp.2a), $5x'^1x'^1 + 14x'^1x'^2 + 10x'^2x'^2 = 5$.

2.3 Duale Basis

a) $\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \rightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i^T$

b) $\mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}_2 = 0 \rightarrow \mathbf{f}^1 = C(1\ 3)$ (C: Konstatnte), $\quad \mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}_1 = 1 \rightarrow -C = 1 \rightarrow \mathbf{f}^1 = (-1\ \ -3)$
$\mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{f}_1 = 0 \rightarrow \mathbf{f}^2 = C(1\ 2)$ (C: Konstatnte), $\quad \mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{f}_2 = 1 \rightarrow C = 1 \rightarrow \mathbf{f}^2 = (1\ 2)$

c) $x_1\mathbf{e}^1 + x_2\mathbf{e}^2 = x_1'\mathbf{f}^1 + x_2'\mathbf{f}^2 \rightarrow (x_1\ x_2) = x_1'(-1\ \ -3) + x_2'(1\ 2) = (x_1'\ x_2') \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = (x_1'\ x_2')\,\mathbf{F}^*$

$\rightarrow (x_1'\ x_2') = (x_1\ x_2)\,(\mathbf{F}^*)^{-1} \rightarrow \mathbf{T}^* = (\mathbf{F}^*)^{-1}$

d) $(x_1, x_2) = (1, 2)$

$\mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$(x'_1\ x'_2) = (1\ 2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = (0\ 1)$

e) $\mathbf{F}^*\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{F}^* = \mathbf{F}^{-1}$

f) $(x'_1\mathbf{f}^1 + x'_2\mathbf{f}^2) \cdot (x'^1\mathbf{f}_1 + x'^2\mathbf{f}_2) = x'_i\mathbf{f}^i \cdot x'^j\mathbf{f}_j = x'_i x'^j \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = x'_i x'^j \delta^i{}_j = x'_i x'^i$

Wenn $(x'^1, x'^2) = (-7, 5)$ und $(x'_1, x'_2) = (0, 1)$, $x'_i x'^i = 5$.

g) $x'_i x'^i = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \mathbf{T}^*\mathbf{T} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} (\mathbf{F}^*)^{-1}\mathbf{F}^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = x_i x^i$