3. Tutorium **für 28.10.2016**

3.1 Kronecker-Delta und Levi-Civita Symbol

Das Kronecker-Delta : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Das Levi-Civita Symbol:

$$\varepsilon_{ijk\dots} = \begin{cases} +1 & \text{falls} \quad (i,j,k,\cdots) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3,\cdots) \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls} \quad (i,j,k,\cdots) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3,\cdots) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechne $\delta_{ii} - \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki} + 2\delta_{ij}\delta_{kk}\delta_{ji}$ in d-Dimensionen.

b) Gegeben seien 2 Vektoren, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, in einem kartesischen Koordinatensystem. Schreibe mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols das Kreuzprodukt $(\mathbf{b} \times \mathbf{a})_i$ in Indexschreibweise.

c) Berechne $\varepsilon_{ijk} a_i a_j$.

d) Gegeben sei eine 3×3-Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Schreibe mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols die Determinante $\det\mathbf{A}$ in Indexschreibweise.

e) Berechne $\partial_i x_j$ für $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. ($(x_1, x_2, \cdots)$ sind die kartesischen Koordinaten.)

f) Berechne $\partial_i (x_i x_j x_j)$ in d Dimensionen.

3.2 Orthogonalprojektion

a) Gegeben sei ein Vektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Schreibe den zugehörigen Projektor $\mathbf{E_a}$ als eine 2×2 Matrix.

b) Berechne $\mathbf{E_a}^2$.

c) Berechne $(\mathbf{1} - \mathbf{E_a})(\mathbf{1} + \mathbf{E_a})^4 \mathbf{a}$.

d) Gegeben sei eine orthonormale Basis $\mathcal{B}_e = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Ein Vektor $\mathbf{x}$ ($\in \text{span}(\mathbf{B}_e)$) wird in der Basis $\mathcal{B}_e$ mit $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ dargestellt. Schreibe $x^1 \mathbf{e}_1$ und $x^2 \mathbf{e}_2$ mit Hilfe der Projektoren $\mathbf{E}_{\mathbf{e}_1}$ und $\mathbf{E}_{\mathbf{e}_2}$ um.

e) Berechne $\mathbf{E}_{\mathbf{e}_1} + \mathbf{E}_{\mathbf{e}_2}$ für $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

f) Gegeben sei eine andere orthonormale Basis $\mathcal{B}_f = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ (wobei $\text{span}(\mathbf{B}_e) = \text{span}(\mathbf{B}_f)$). Berechne $(\mathbf{E}_{\mathbf{f}_1}\mathbf{E}_{\mathbf{e}_1} + \mathbf{E}_{\mathbf{f}_2}\mathbf{E}_{\mathbf{e}_1} + \mathbf{E}_{\mathbf{f}_1}\mathbf{E}_{\mathbf{e}_2} + \mathbf{E}_{\mathbf{f}_2}\mathbf{E}_{\mathbf{e}_2})\,\mathbf{f}_i$.

3.3 Reziprokes Gitter

Gegeben sei ein Kristallgitter mit Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, die ein Rechtssystem bilden. Die Basisvektoren des reziproken Gitters $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{b}^3$ sind einfach die Basisvektoren des Dualraumes $\mathcal{B}^*$, d.h. $\{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3\} = \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3\}$.
a) Schreibe das Volumen der primitiven Einheitszelle des Kristallgitters an. (Die Einheitszelle ist das von den Basisvektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ eines Kristallgitters gebildete Parallelepiped.)
b) Bestimme die dualen Vektoren $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{b}^3$.
Hinweis : Zuerst finde einen Vektor $\mathbf{c}^i$, der orthogonal zu den beiden Vektoren $\mathbf{a}_j$ und $\mathbf{a}_k$ ($j \neq i$, $k \neq i$) ist, und dann normiere den Vektor mit einem Faktor C, sodass die Bedingung $\mathbf{b}^i \cdot \mathbf{a}_i = C\mathbf{c}^i \cdot \mathbf{a}_i = 1$ erfüllt wird.
c) Die Basisvektoren für ein bcc-Kristallgitter sind in einem kartesischen Koordinatensystem durch

$$\mathbf{a}_1 = (L/2)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = (L/2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = (L/2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne die Basisvektoren des reziproken Gitters $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{b}^3$.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2a-c, 2d-f, 3a, 3bc