3. Tutorium - Lösungen **28.10.2016**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

3.1 Kronecker-Delta und Levi-Civita Symbol

a) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \cdots + \delta_{dd} = 1 + 1 + \cdots + 1 = d$
$\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki} = \delta_{ik}\delta_{ki} = \delta_{ii} = d$
$\delta_{ij}\delta_{kk}\delta_{ji} = \delta_{ij}\delta_{ji}\delta_{kk} = \delta_{ii}\delta_{kk} = d^2$
$\delta_{ii} - \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki} + 2\delta_{ij}\delta_{kk}\delta_{ji} = 2d^2$
b) z.B. $(\mathbf{b} \times \mathbf{a})_1 = b_2 a_3 - b_3 a_2$.
$(\mathbf{b} \times \mathbf{a})_i = \varepsilon_{ijk} b_j a_k$
c) $\underbrace{\varepsilon_{ijk} a_i a_j = \varepsilon_{jik} a_j a_i}_{\text{Umbenennung der Indizes}} = \varepsilon_{jik} \underbrace{a_j a_i}_{a_j a_i = a_i a_j} = \underbrace{\varepsilon_{jik}}_{\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ijk}} a_i a_j = -\varepsilon_{ijk} a_i a_j \to \varepsilon_{ijk} a_i a_j = 0$
Alternative Lösung : $\varepsilon_{ijk} a_i a_j = (\mathbf{a} \times \mathbf{a})_k = 0$
d) $\det\mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$
$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$
$= \varepsilon_{1jk}a_{11}a_{2j}a_{3k} + \varepsilon_{2jk}a_{12}a_{2j}a_{3k} + \varepsilon_{3jk}a_{13}a_{2j}a_{3k} = \varepsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}$
e) $\partial_i x_j = \delta_{ij}$
f) $\partial_i(x_i x_j x_j) = (\partial_i x_i)x_j x_j + x_i(\partial_i x_j)x_j + x_i x_j(\partial_i x_j) = \delta_{ii}x_j x_j + x_i\delta_{ij}x_j + x_i x_j \delta_{ij} = d x_j x_j + x_i x_i + x_i x_i =$ $(d+2)x_i x_i = (d+2)\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$

3.2 Orthogonalprojektion

a) $\mathbf{E_a} = \frac{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}^\dagger}{\mathbf{a}^\dagger\cdot\mathbf{a}} = \frac{1}{|a|^2+|b|^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix} = \frac{1}{|a|^2+|b|^2}\begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix}$
b) $\mathbf{E_a}^2 = \frac{1}{(|a|^2+|b|^2)^2}\begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(|a|^2+|b|^2)^2}\begin{pmatrix} |a|^4 + |a|^2|b|^2 & ab^*(|a|^2+|b|^2) \\ a^*b(|a|^2+|b|^2) & |a|^2|b|^2 + |b|^4 \end{pmatrix}$
$= \frac{1}{|a|^2+|b|^2}\begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} = \mathbf{E_a}$
Alternative Lösung:
$\mathbf{E_a}^2 = \frac{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}^\dagger}{\mathbf{a}^\dagger\cdot\mathbf{a}} \cdot \frac{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}^\dagger}{\mathbf{a}^\dagger\cdot\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}\otimes(\mathbf{a}^\dagger\cdot\mathbf{a})\otimes\mathbf{a}^\dagger}{(\mathbf{a}^\dagger\cdot\mathbf{a})^2} = \frac{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}^\dagger}{\mathbf{a}^\dagger\cdot\mathbf{a}} = \mathbf{E_a}$
c) $\mathbf{E_a}\mathbf{a} = \mathbf{a} \to (\mathbf{1} + \mathbf{E_a})\mathbf{a} = 2\mathbf{a} \to (\mathbf{1} + \mathbf{E_a})^4\mathbf{a} = 2^4\mathbf{a} \to (\mathbf{1} - \mathbf{E_a})(\mathbf{1} + \mathbf{E_a})^4\mathbf{a} = 2^4(\mathbf{1} - \mathbf{E_a})\mathbf{a} = \mathbf{0}$
d) Die Koordinate x^i ist die Orthogonalprojektion des Vektors $\mathbf{x}$ auf den normierten Basisvektor $\mathbf{e}_i$.
$\to x^i = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{x}$.
$x^1\mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{x})\mathbf{e}_1 = \left(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1^T\right)\mathbf{x} = \mathbf{E}_{\mathbf{e}_1}\mathbf{x}$. In ähnlicher Weise $x^2\mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_{\mathbf{e}_2}\mathbf{x}$
e) $\mathbf{E}_{\mathbf{e}_1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}$
$\mathbf{E}_{\mathbf{e}_2} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha \end{pmatrix}$
$\mathbf{E}_{\mathbf{e}_1} + \mathbf{E}_{\mathbf{e}_2} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{1}$
f) $(\mathbf{E}_{\mathbf{f}_1}\mathbf{E}_{\mathbf{e}_1} + \mathbf{E}_{\mathbf{f}_2}\mathbf{E}_{\mathbf{e}_1} + \mathbf{E}_{\mathbf{f}_1}\mathbf{E}_{\mathbf{e}_2} + \mathbf{E}_{\mathbf{f}_2}\mathbf{E}_{\mathbf{e}_2})\,\mathbf{f}_i = (\mathbf{E}_{\mathbf{f}_1} + \mathbf{E}_{\mathbf{f}_2})\underbrace{(\mathbf{E}_{\mathbf{e}_1} + \mathbf{E}_{\mathbf{e}_2})}_{=\mathbf{1}}\mathbf{f}_i = (\mathbf{E}_{\mathbf{f}_1} + \mathbf{E}_{\mathbf{f}_2})\,\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i$

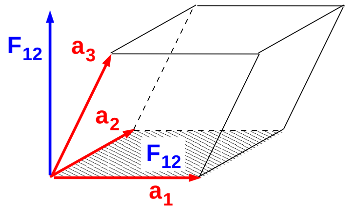
Anmerkung: $\mathbf{T} = (\mathbf{E}_{\mathbf{f}_1}\mathbf{E}_{\mathbf{e}_1} + \mathbf{E}_{\mathbf{f}_2}\mathbf{E}_{\mathbf{e}_1} + \mathbf{E}_{\mathbf{f}_1}\mathbf{E}_{\mathbf{e}_2} + \mathbf{E}_{\mathbf{f}_2}\mathbf{E}_{\mathbf{e}_2})$ ist die Transformationsoperator zwischen den 2 Basen.

$\mathbf{T} = (\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_i^T)(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j^T) = (\mathbf{f}_1^T \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{e}_1^T + (\mathbf{f}_1^T \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{e}_2^T + (\mathbf{f}_2^T \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{e}_1^T + (\mathbf{f}_2^T \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{e}_2^T$

$\mathbf{Tx} = (\mathbf{f}_1^T \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{f}_1 x^1 + (\mathbf{f}_1^T \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{f}_1 x^2 + (\mathbf{f}_2^T \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{f}_2 x^1 + (\mathbf{f}_2^T \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{f}_2 x^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^T \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{f}_1^T \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2^T \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{f}_2^T \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^T \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{f}_1^T \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2^T \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{f}_2^T \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$ ist die Matrixdarstellung des Operators (siehe Bsp.1.3).

3.3 Reziprokes Gitter



a) $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = F_{12}\hat{\mathbf{F}}_{12}$
(F_{12} : Fläche des Parallelogramms das von $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ aufgespannt ist,
$\hat{\mathbf{F}}_{12}$: Einheitsvektor senkrecht auf dem Parallelogramm)
Die Höhe H des Parallelepipeds ist die Orthogonalprojektion des Vektors $\mathbf{a}_3$ auf den Vektor $\hat{\mathbf{F}}_{12}$, d.h. $H = \mathbf{a}_3^T \cdot \hat{\mathbf{F}}_{12}$.
Volumen: $V = F_{12}H = \mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{a}_3 = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \cdot \mathbf{a}_3$
In ähnlicher Weise $V = (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \cdot \mathbf{a}_1 = (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T \cdot \mathbf{a}_2$
b) $\mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \to \mathbf{b}^{1T} = C\,\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ (C : Normierungsfaktor)
Normierung des Vektors $\mathbf{b}_1$: $1 = \mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = C\,(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \cdot \mathbf{a}_1 = CV \to C = 1/V \to \mathbf{b}^1 = \frac{1}{V}\,(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T$
In ähnlicher Weise $\mathbf{b}^2 = \frac{1}{V}\,(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T$ und $\mathbf{b}^3 = \frac{1}{V}\,(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T$

Anmerkung : $\mathbf{F}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \mathbf{b}^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \\ (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T \\ (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \end{pmatrix}$ ist die Inverse der Matrix $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$

c) $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T = \frac{L^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{L^3}{2}$

$\mathbf{b}^1 = \frac{1}{V}\,(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T = \frac{2}{L^3}\frac{L^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}^2 = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}^3 = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Das reziproke Gitter des bcc-Gitters ist das fcc-Kristallgitter (und vice versa).
Anmerkung : Das reziproke Gitter wird in der Kristallographie verwendet. In der Festkörperphysik ist das reziproke Gitter konventionell mit dem Faktor 2π definiert, d.h. $\mathbf{b}^i = 2\pi\mathbf{a}^\mathbf{i}$. Die Vektoren $\mathbf{b}^i$ entsprechen den Wellenvektoren im k-Raum ($k = 2\pi/\lambda$ mit der Wellenlänge λ).