4. Tutorium **für 4.11.2016**

4.1 Duale Basis

a) Berechne die dualen Basisvektoren $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ zur Basis

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Berechne die dualen Basisvektoren $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ zur Basis

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.2 Kommutator

a) Berechne den Kommutator $[\sigma_x, \sigma_y]$ wobei

$$\sigma_x = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_y = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Berechne den Kommutator $[\sigma_x, [\sigma_x, \sigma_y]]$.

c) Gegeben seien zwei Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechne den Kommutator der Orthogonalprojektoren $[E_{\mathbf{a}}, E_{\mathbf{b}}]$.

d) Gegeben seien zwei 3×3 Matrizen $\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \mathbf{U}^\dagger$ und $\mathbf{B} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix} \mathbf{U}^\dagger$ wobei $\mathbf{U}$ und $\mathbf{U}^\dagger$ eine unitäre Matrix und ihre adjungierte Matrix sind. Berechne den Kommutator $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$.

4.3 Spatprodukt

Gegeben seien 3-dimensionalen Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$.

a) Zeige in Indexschreibweise, dass $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \det \mathbf{X}$ wobei $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix}$ (die Matrix mit den Vektoren in Spalten).

b) Zeige $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ durch repräsentatives Einsetzen von Zahlen in die Indizes (Einsteinsche Summenkonvention beachten).

c) Zeige in Indexschreibweise, dass $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

4.4 Spektraltheorem

Ein selbstadjungierter Operator wird mit der 2×2 Matrix $\mathbf{A}$ dargestellt. Die Matrix $\mathbf{A}$ hat die normierten Eigenvektoren $\mathbf{x}_i$ $(i = 1, 2)$ mit den Eigenwerten λ_i $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$.

a) Zeige, dass die Eigenwerte λ_i reell sind und dass die Eigenvektoren orthogonal zueinander sind.

b) Die Zerlegung der Matrix $\mathbf{A}$ mit den Matrizen $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ wird durch $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\dagger$ gegeben. Überprüfe, dass die zerlegte Matrix die Eigenwertgleichung erfüllt.

c) $\mathbf{E}_i$ $(i = 1, 2)$ seien die Projektoren auf die Eigenvektoren $\mathbf{x}_i$ (bzw. auf die Eigenräume mit den Eigenvektoren x_i). Zeige, dass sich die Matrix $\mathbf{A}$ in der spektralen Form $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \mathbf{E}_i$ schreiben lässt.

d) Berechne $\mathbf{A}^2$ und zeige, dass $\mathbf{A}^2 = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i^2 \mathbf{E}_i$.

e) Zeige, dass $\exp(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{2} \exp(\lambda_i) \mathbf{E}_i$ gilt.

Ankreuzbar: 1ab, 2ab, 2cd, 3a-c, 4a-c, 4de