4. Tutorium - Lösungen **4.11.2016**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

4.1 Duale Basis

a) $V = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = 3 - 2 = 1$

$(\mathbf{e}^1)^T = \frac{1}{V}\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{e}^2)^T = \frac{1}{V}\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{e}^3)^T = \frac{1}{V}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Anmerking : In diesem Beispiel ist V tatsächlich die Fäche des von $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ aufgespannten Parallelogramms und gilt $V = \det\mathbf{A}$ wobei die 2×2 Matrix $\mathbf{A}$ durch $\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{A}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \quad 0 & & 1 \end{pmatrix}$ definiert ist.

b) $V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4$

$(\mathbf{e}^1)^T = \frac{1}{V}\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{e}^2)^T = \frac{1}{V}\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{e}^3)^T = \frac{1}{V}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Anmerkung : $V = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$.

4.2 Kommutator

a) $[\sigma_x, \sigma_y] = \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2i\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 2i\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} (\equiv 2i\sigma_z)$

Anmerkung: $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_z$ sind die Spinmatrizen für Spin-1-Systeme und erfüllt die Kommutatorrelationen $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$.

b) $[\sigma_x, [\sigma_x, \sigma_y]] = [\sigma_x, 2i\sigma_z] = 2i\sigma_x\sigma_z - 2i\sigma_z\sigma_x = 4\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 4\sqrt{2}i\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$

$= 4\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = 4\sigma_y \quad \left[\text{wobei} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right]$

c)

$\mathbf{E_a} = \frac{\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E_b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$[\mathbf{E}_a, \mathbf{E}_b] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{D_A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D_B} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix}$

$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{UD_A}\underbrace{\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}}_{=\mathbf{1}}\mathbf{D_B}\mathbf{U}^\dagger - \mathbf{UD_B}\underbrace{\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}}_{=\mathbf{1}}\mathbf{D_A}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}[\mathbf{D_A}, \mathbf{D_B}]\mathbf{U}^\dagger$

$\mathbf{D_A}\mathbf{D_B} = \mathbf{D_B}\mathbf{D_A} = \begin{pmatrix} \lambda_1\Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\Lambda_3 \end{pmatrix} \to [\mathbf{D_A}, \mathbf{D_B}] = 0 \to [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$

4.3 Spatprodukt

a) $\det \mathbf{X} \to \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$
$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \to a_i(\mathbf{b}\times\mathbf{c})_i = a_i\varepsilon_{ijk}b_jc_k \to \det\mathbf{X}$
$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) \to b_i(\mathbf{c}\times\mathbf{a})_i = b_i\varepsilon_{ijk}c_ja_k = \varepsilon_{ijk}a_kb_ic_j = \varepsilon_{kij}a_kb_ic_j = \varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k \to \det\mathbf{X}$
$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \to c_i(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i = c_i\varepsilon_{ijk}a_jb_k = \varepsilon_{ijk}a_jb_kc_i = \varepsilon_{jki}a_jb_kc_i = \varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k \to \det\mathbf{X}$
b)
i) Wenn $i=j$: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=0$. $\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{il}\delta_{im}-\delta_{im}\delta_{il}$ (ohne Summe über i)
Wenn $l=m=i$, $\delta_{il}\delta_{im}-\delta_{im}\delta_{il} = 1-1=0$ und sonst, $\delta_{il}\delta_{im}-\delta_{im}\delta_{il}=0-0=0$
ii) Wenn $i\neq j$: In der Summe über k trägt $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$ nur 1 Term ($k\neq i$ und $k\neq j$) bei.
ii-a) Wenn $l=i$ und $m=j$ (z.B. $i=l=1$, $j=m=2$, $k=3$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=1$
$\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{ii}\delta_{jj}-\delta_{ij}\delta_{ji}=1$ (ohne Einsteinsche Summenkonvention)
ii-b) Wenn $l=j$ und $m=i$ (z.B. $i=m=1$, $j=l=2$, $k=3$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = -1$
$\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{ij}\delta_{ji}-\delta_{ii}\delta_{jj}=-1$ (ohne Einsteinsche Summenkonvention)
ii-c) Sonst ($l=m$ und/oder $l=k$ und/oder $m=k$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=0$ und $\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}=0$
Alternative Lösung: $\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{abk}\delta_{ia}\delta_{jb}$ und $\varepsilon_{klm}=\varepsilon_{lmk}=\varepsilon_{cdk}\delta_{lc}\delta_{md}$
$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{abk}\delta_{ia}\delta_{jb}\varepsilon_{cdk}\delta_{lc}\delta_{md} = \varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk}\delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{lc}\delta_{md}$
Wenn $c=a$ und $d=b$, $\varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk} = \underbrace{\varepsilon_{abk}\varepsilon_{abk}}_{\text{Summe nur über } k} = 1$ und wenn $c=b$ und $d=a$, $\varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk} = \underbrace{\varepsilon_{abk}\varepsilon_{bak}}_{\text{Summe nur über } k} = -1$. Sonst $\varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk}=0$.
$\to \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{la}\delta_{mb} - \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{lb}\delta_{ma} = \delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$
c) $(\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))_i = \varepsilon_{ijk}a_j(\mathbf{b}\times\mathbf{c})_k = \varepsilon_{ijk}a_j\varepsilon_{klm}b_lc_m = (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})a_jb_lc_m = \delta_{il}a_jb_lc_j - \delta_{im}a_jb_jc_m$
$= b_ia_jc_j - c_ia_jb_j = b_i(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - c_i(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

4.4 Spektraltheorem

a) $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i \to$ (transponiert und konjugiert) $\mathbf{x}_i^\dagger\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{x}_i^\dagger\mathbf{A} = \bar{\lambda}_i\mathbf{x}_i^\dagger$ (selbstadjungierter Operator: $\mathbf{A}^\dagger=\mathbf{A}$)
$\mathbf{x}_i^\dagger \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{x}_j}_{=\lambda_j\mathbf{x}_j} = \lambda_j\mathbf{x}_i^\dagger\mathbf{x}_j$ oder $\underbrace{\mathbf{x}_i^\dagger\mathbf{A}}_{=\bar{\lambda}_i\mathbf{x}_i^\dagger}\mathbf{x}_j = \bar{\lambda}_i\mathbf{x}_i^\dagger\mathbf{x}_j \to \lambda_j\mathbf{x}_i^\dagger\mathbf{x}_j = \bar{\lambda}_i\mathbf{x}_i^\dagger\mathbf{x}_j$.
Wenn $i=j$, $\mathbf{x}_i^\dagger\mathbf{x}_i=1 \to \lambda_i=\bar{\lambda}_i$, d.h. λ_i ($i=1,2$) sind reell.
Wenn $i\neq j$, $(\lambda_j-\lambda_i)\mathbf{x}_i^\dagger\mathbf{x}_j=0$. Weil $\lambda_j\neq\lambda_i$, $\mathbf{x}_i^\dagger\mathbf{x}_j=0$ (Orthogonalität der Eigenbasis).
b) Wenn $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1^\dagger\\ \mathbf{x}_2^\dagger\end{pmatrix}$,
gilt $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ 0\end{pmatrix} = \lambda_1\mathbf{x}_1$
In ähnlicher Weise $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$
c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1^\dagger\\ \mathbf{x}_2^\dagger\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1^\dagger\\ \mathbf{x}_2^\dagger\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1^\dagger\\ \mathbf{x}_2^\dagger\end{pmatrix}$
$= \lambda_1\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1^\dagger\\ 0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{x}_2^\dagger\end{pmatrix} = \lambda_1\mathbf{x}_1\otimes\mathbf{x}_1^\dagger + \lambda_2\mathbf{x}_2\otimes\mathbf{x}_2^\dagger = \sum_{i=1}^2\lambda_i\mathbf{E}_i$
d) $\mathbf{A}^2 = \sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2\lambda_i\mathbf{E}_i\lambda_j\mathbf{E}_j = \sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2\lambda_i\mathbf{E}_i\lambda_j\mathbf{E}_j = \sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2\lambda_i\lambda_j\mathbf{x}_i\otimes\underbrace{\mathbf{x}_i^\dagger\cdot\mathbf{x}_j}_{=\delta_{ij}}\otimes\mathbf{x}_j^\dagger$
$= \sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2\lambda_i\lambda_j\delta_{ij}\mathbf{x}_i\otimes\mathbf{x}_j^\dagger = \sum_{i=1}^2\lambda_i^2\mathbf{E}_i$
oder $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\underbrace{\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}}_{=\mathbf{1}}\mathbf{D}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}\mathbf{D}^2\mathbf{U}^\dagger \to \mathbf{A} = \sum_{i=1}^2\lambda_i^2\mathbf{E}_i$
e) $\mathbf{A}^n = \left(\sum_{i=1}^2\lambda_i\mathbf{E}_i\right)^n = \left(\sum_{i_1=1}^2\lambda_{i_1}\mathbf{E}_{i_1}\right)\left(\sum_{i_2=1}^2\lambda_{i_2}\mathbf{E}_{i_2}\right)\cdots\left(\sum_{i_n=1}^2\lambda_{i_n}\mathbf{E}_{i_n}\right) = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_n}\mathbf{E}_{i_1}\mathbf{E}_{i_2}\cdots\mathbf{E}_{i_n}$
Da $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 = 0$, tragen in der Summe die Terme mit $i_1=i_2=\cdots=i_n=1$ oder 2 bei, d.h. $\mathbf{A}^n = \sum_{i=1}^2\lambda_i^n\mathbf{E}_i^n = \sum_{i=1}^2\lambda_i^n\mathbf{E}_i$
(alternative Methode : $\mathbf{A}^n = (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\dagger)^n = \mathbf{U}\mathbf{D}^n\mathbf{U}^\dagger = \sum_{i=1}^2\lambda_i^n\mathbf{E}_i$)
$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\mathbf{A}^n = \sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\sum_{i=1}^2\lambda_i^n\mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^2\left(\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\lambda_i^n\right)\mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^2 e^{\lambda_i}\mathbf{E}_i$
($\mathbf{A}^0 = \mathbf{U}\mathbf{D}^0\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}$)