5. Tutorium **für 11.10.2016**

5.1 Differentialoperatoren

Vereinfache und berechne mit Hilfe der Indexschreibweise (für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik), wobei $\mathbf{x}$ ein Ortsvektor, $\mathbf{p}$ ein ortsunabhängiger Impuls, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ ein ortsabhängiges Vektorfeld ist:
a) $\partial_i \sqrt{x_j x_j}$
b) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{r}\right)$ mit $r = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$
c) $\mathrm{rot}\,(\mathbf{x} \times \mathbf{p})$
d) $\mathrm{div}\,(\mathbf{x} \times \mathbf{p})$
e) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$

5.2 Anwendung des Spektraltheorems

Betrachte gekoppelte lineare Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_1 + 2x_2\,, \quad \frac{d}{dt}x_2 = 2x_1 - 2x_2\,.$$

a) Die Differentialgleichungen können in die Form $\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ umgeschrieben werden. Schreibe die 2×2 Matrix $\mathbf{A}$ an.
b) Berechne die Eigenwerte λ_i ($\lambda_1 < \lambda_2$) und die normierten Eigenvektoren $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2$) der Matrix $\mathbf{A}$.
c) Schreibe die Differentialgleichungen, statt der Matrix $\mathbf{A}$, mit den Projektoren $\mathbf{E}_i = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i^T$ (ohne Summe über i) um.
d) Schreibe die Differentialgleichungen für y_i ($i = 1, 2$) wobei $\mathbf{x} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2$.
e) Berechne die Lösung der Differentialgleichungen für $y_i(t)$ und dann die Lösung $x_i(t)$ mit den Randbedingungen $x_1(t = 0) = 1$ und $x_2(t = 0) = 0$.
f) Überprüfe, dass $\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(t = 0)$ gilt.

5.3 Projektion auf die nicht-orthogonale Basis

Gegeben sei ein Vektor $\mathbf{x} = x^i \mathbf{f}_i$ in einer nicht-orthonormalen Basis, $\{\mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2,\ \mathbf{f}_3\}$.
a) Zeige, dass $x^i = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{x}$ gilt, wobei $\mathbf{f}^i$ die dualen Vektoren zu den Basisvektoren $\mathbf{f}_i$ sind.
b) Zeige, dass $x_i = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{f}_i$ gilt.
c) Zeige, dass $x_i = g_{ij} x^j$ mit $g_{ij} = \mathbf{f}_i^T \cdot \mathbf{f}_j$ gilt.
d) Zeige, dass $x^i = g^{ij} x_j$ mit $g^{ij} = (\mathbf{f}^i \cdot (\mathbf{f}^j)^T)$ gilt.
e) Berechne g_{ij} und g^{ij} für das reziproken Gitter aus Bsp.3.3c,

$$\mathbf{f}_1 = (L/2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = (L/2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = (L/2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

und überprüfe, dass der Tensor $\mathbf{g}^* = (g^{ij})$ die Inverse des metrischen Tensors $\mathbf{g} = (g_{ij})$ ist.

Ankreuzbar: 1ab, 1c-e, 2ab, 2cd, 2ef, 3a-e