5. Tutorium - Lösungen **11.11.2016**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

5.1 Differentialoperatoren

a) $\partial_i\sqrt{x_jx_j} = \frac{1}{2\sqrt{x_jx_j}}\partial_i(x_kx_k) = \frac{1}{2\sqrt{x_jx_j}}(\delta_{ki}x_k + x_k\delta_{ki}) = \frac{x_i}{\sqrt{x_jx_j}} = \frac{x_i}{r}$ mit $r = \sqrt{x_jx_j}$

Anmerkung :

$$\partial_i(x_jx_j) = \underbrace{\partial_i\sum_j x_jx_j = \sum_j \partial_i x_jx_j}_{\text{(Die Reihenfolge (Summe und Ableitung) ist vertauschbar)}} = \textstyle\sum_j[(\partial_i x_j)x_j + x_j(\partial_i x_j)]$$

$$\partial_i\sqrt{x_jx_j} = \underbrace{\partial_i\sqrt{\sum_j(x_jx_j)} \neq \sum_j \partial_i\sqrt{x_jx_j}}_{\text{(Die Reihenfolge (Summe und Ableitung) ist \textbf{nicht} vertauschbar)}} = \textstyle\sum_j[(\partial_i\sqrt{x_j})\sqrt{x_j} + \sqrt{x_j}(\partial_i\sqrt{x_j})]$$

b) $\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{x}}{r}\right) \to \partial_i\left(\frac{x_i}{r}\right) = \frac{1}{r}\big(\underbrace{\partial_i x_i}_{\delta_{ii}=3}\big) + x_i\left(\partial_i\frac{1}{r}\right) = \frac{3}{r} - x_i\frac{1}{r^2}\left(\partial_i r\right) = \frac{3}{r} - \frac{x_i}{r^2}\frac{x_i}{r} = \frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{2}{r}$

c) $\mathrm{rot}(\mathbf{x}\times\mathbf{p}) \to \varepsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{x}\times\mathbf{p})_k = \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}x_lp_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j x_lp_m = \partial_j x_ip_j - \partial_j x_jp_i = \delta_{ji}p_j - \delta_{jj}p_i = p_i - 3p_i = -2p_i \to -2\mathbf{p}$

d) $\mathrm{div}(\mathbf{x}\times\mathbf{p}) \to \partial_i(\mathbf{x}\times\mathbf{p})_i = \partial_i\varepsilon_{ijk}x_jp_k = \varepsilon_{ijk}\delta_{ij}p_k = 0$

e) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\mathbf{A} \to \partial_i\left(\mathrm{rot}\mathbf{A}\right)_i = \partial_i\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k = \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\text{antisymmetrisch}}\ \underbrace{\partial_i\partial_j}_{\text{symmetrisch}}\ A_k = 0$

(Ableitungen lassen sich in der Reihenfolge nach dem Satz von Schwarz vertauschen, sofern die Funktion mehrfach stetig differenzierbar ist.)

5.2 Anwendung des Spektraltheorems

a) $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

b) Eigenwertgleichung: $\mathbf{A}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda_i\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+2b \\ 2(a-b) \end{pmatrix} = \lambda_i\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to 2b^2 + 3ab - 2a^2 = 0 \to (b+2a)(2b-a) = 0 \to b = -2a,\ a/2$

Wenn $b = -2a$, $\mathbf{A}\begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a \\ 6a \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix} \to \lambda_1 = -3$ und $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Wenn $b = a/2$, $\mathbf{A}\begin{pmatrix} a \\ a/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ a/2 \end{pmatrix} \to \lambda_2 = 2$ und $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Projektoren : $\mathbf{E}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{E}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Spektraltheorem : $\mathbf{A} = -3\mathbf{E}_1 + 2\mathbf{E}_2$

Differentialgleichungen $\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} = -3\mathbf{E}_1\mathbf{x} + 2\mathbf{E}_2\mathbf{x}$

d) $\mathbf{x} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 \to y_1 = \mathbf{e}_1^T\cdot\mathbf{x}$ und $y_2 = \mathbf{e}_2^T\cdot\mathbf{x}$

$\frac{d}{dt}y_1 = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_1^T\cdot\mathbf{x}) = \mathbf{e}_1^T\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{e}_1^T\cdot(-3\mathbf{E}_1\mathbf{x} + 2\mathbf{E}_2\mathbf{x}) = -3\mathbf{e}_1^T\cdot\mathbf{x} = -3y_1$

$\frac{d}{dt}y_2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_2^T\cdot\mathbf{x}) = \mathbf{e}_2^T\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{e}_2^T\cdot(-3\mathbf{E}_1\mathbf{x} + 2\mathbf{E}_2\mathbf{x}) = 2\mathbf{e}_2^T\cdot\mathbf{x} = 2y_2$

Alternative Lösung: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{U}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ wobei $\mathbf{U}$ eine unitäre Matrix ist.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}^T\mathbf{x} \to \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}^T\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{U}^T\mathbf{U}}_{=\mathbf{I}}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\underbrace{\mathbf{U}^T\mathbf{x}}_{=(y_1\ y_2)^T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \end{pmatrix}$$

e) $y_1 = \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2x_2)$ und $y_2 = \mathbf{e}_2^T \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + x_2)$
Aus den Differentialgleichungen : $y_1 = C_1 e^{-3t}$ und $y_2 = C_2 e^{2t}$
$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(y_1 + 2y_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{2t})$
$x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2y_1 + y_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t})$
$x_2(t=0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2C_1 + C_2) = 0 \rightarrow C_2 = 2C_1$
$x_1(t=0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(C_1 + 2C_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(C_1 + 4C_1) = \sqrt{5}C_1 = 1 \rightarrow C_1 = 1/\sqrt{5}$
$x_1 = \frac{1}{5}(e^{-3t} + 4e^{2t})$
$x_2 = \frac{2}{5}(-e^{-3t} + e^{2t})$
f) $\mathbf{A} = -3\mathbf{E}_1 + 2\mathbf{E}_2 \rightarrow \exp(\mathbf{A}t) = e^{-3t}\mathbf{E}_1 + e^{2t}\mathbf{E}_2$ (siehe Bsp.4.4)
$\exp(\mathbf{A}t) \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = (e^{-3t}\mathbf{E}_1 + e^{2t}\mathbf{E}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-3t}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + e^{2t}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

5.3 Projektion auf die nicht-orthogonale Basis

a) $\mathbf{x} = x^i \mathbf{f}_i \rightarrow \mathbf{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{F}} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{f}^3 \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix}$
Alternative Lösung: $\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f}^i \cdot x^j \mathbf{f}_j = x^j \delta^i{}_j = x^i$
b) $\mathbf{x}^T = x_i \mathbf{f}^i \rightarrow \mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^3 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{F}^*} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \mathbf{F}^*$
$\rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T(\mathbf{F}^*)^{-1} = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{f}_1 & \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{f}_2 & \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{f}_3 \end{pmatrix}$
Alternative Lösung: $\mathbf{x} = x^j \mathbf{f}_j = x_j \mathbf{f}^j \rightarrow \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{f}_i = (x_j \mathbf{f}^j)^T \cdot \mathbf{f}_i = x_j \delta^j{}_i = x_i$
c) $x_i = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{f}_i = (x^j \mathbf{f}_j)^T \cdot \mathbf{f}_i = (x^j \mathbf{f}_j^T) \cdot \mathbf{f}_i = x^j(\mathbf{f}_j^T \cdot \mathbf{f}_i) = x^j g_{ji}$
d) $x^i = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f}^i \cdot (x_j \mathbf{f}^j)^T = \mathbf{f}^i \cdot x_j(\mathbf{f}^j)^T = x_j(\mathbf{f}^i \cdot (\mathbf{f}^j)^T) = x_j g^{ij}$
e) $(g_{ij}) = \frac{L^2}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
Aus Bsp.3.3c $\mathbf{f}^1 = \frac{1}{L}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}^2 = \frac{1}{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}^3 = \frac{1}{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow (g^{ij}) = \frac{1}{L^2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\frac{L^2}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{L^2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$
Anmerkung : $g_{ij} = (\mathbf{F}^T\mathbf{F})_{ij}$ und $g^{ij} = (\mathbf{F}^*(\mathbf{F}^*)^T)^{ij} \rightarrow g_{ik}g^{kj} = (\mathbf{F}^T \underbrace{\mathbf{F}\mathbf{F}^*}_{=\mathbf{I}}(\mathbf{F}^*)^T)_i{}^j = (\mathbf{F}^T(\mathbf{F}^*)^T)_i{}^j = \delta_i{}^j$