6. Tutorium **für 18.11.2016**

6.1 Spektraltheorem für die nicht-orthogonale Basis

a) Berechne die Rechtseigenvektoren $\mathbf{x}_i$ der 2×2 Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

und die entsprechenden Eigenwerte λ_i.
b) $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ aus (a) ist eine Basis eines Vektorraums. Berechne die dualen Basisvektoren $\mathbf{x}^i$ zur Basis $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$.
c) Zeige, dass die dualen Basisvektoren $\mathbf{x}^i$ die Linkseigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ mit den Eigenwerten λ_i sind.
d) Zeige, dass $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}^2$ gilt.

6.2 Differentialoperatoren

Gegeben sei eine nicht-orthogonale Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$. Die Basisvektoren sind in der kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ mit $\mathbf{f}_i = t^j{}_i \mathbf{e}_j$ dargestellt. $\mathbf{T} = (t^j{}_i)$ ist die Transformationsmatrix zwischen den Basen.
a) Zeige für eine differenzierbare Funktion $\psi(\mathbf{x})$, dass

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} \psi(\mathbf{x}) = t^j{}_i \frac{\partial}{\partial x^j} \psi(\mathbf{x})$$

gilt, d.h. $\left(\frac{\partial}{\partial x'^i} \psi(\mathbf{x})\right)$ ein kovarianter Vektor ist.
Anmerkung: Die Elemente eines kovarianten Vektors werden mit dem unten stehenden Index (z.B. $\frac{\partial}{\partial x'^i} \psi(\mathbf{x}) = \partial'_i \psi(\mathbf{x})$) geschrieben)
b) Zeige, dass

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} \psi(\mathbf{x}) = t^{*i}{}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(\mathbf{x})$$

gilt, d.h. $\left(\frac{\partial}{\partial x'^i} \psi(\mathbf{x})\right)$ ein kontravarianter Vektor ist ($\frac{\partial}{\partial x'_i} \psi(\mathbf{x}) = \partial'^i \psi(\mathbf{x})$). $t^{*i}{}_j$ sind die Elemente der inversen Matrix $\mathbf{T}^{-1}$.
c) Zeige, dass $\partial'_j x^i = \partial^i x'_j = t^i{}_j$ gilt.
d) Zeige, dass $\partial'^i \psi(\mathbf{x}) = g'^{ij} \partial'_j \psi(\mathbf{x})$ gilt. $\mathbf{g}'^{-1} = (g'^{ij})$ ist der inverse metrische Tensor der nicht-orthogonalen Basis.

6.3 Lokale Transformation

Betrachte eine infinitesimale Änderung $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i$ des Vektors $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ wobei $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ die kartesischen Basisvektoren sind. Eine lokale Transformation ist die linearisierte Basistransformation der infinitesimalen Änderung, d.h. $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i = dx'^i \mathbf{e}'_i$. Beantworte die folgenden Fragen für die Transformation zu den Kugelkoordinaten $x'^1 = r$, $x'^2 = \theta$, $x'^3 = \phi$. Die Transformation zwischen kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten ist gegeben durch

$$x^1(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\cos\phi,\ \ x^2(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\sin\phi,\ \ x^3(r,\theta,\phi) = r\cos\theta\,.$$

a) Schreibe die Basisvektoren $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ und $\mathbf{e}'_3$ in der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ an.
b) Berechne die Elemente g'_{ij} des metrischen Tensors der neuen Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$.
c) Schreibe die Länge der infinitesimalen Änderung $ds = \sqrt{dx^i dx_i}$ in die Kugelkoordinaten (r,θ,ϕ) um.
d) Berechne die Länge $\oint_C ds$ der Kurve $C = \{(r,\theta,\phi)|r = R, \theta = \pi/4, 0 \le \phi < 2\pi\}$.
e) Zeige, dass $\partial'_j x^i = \partial^i x'_j = t^i{}_j$ gilt wobei die Transformationsmatrix $\mathbf{T} = (t^i{}_j)$ durch $\mathbf{e}'_j = t^i{}_j \mathbf{e}_i$ definiert ist.
f) Zeige, dass $\mathbf{e}_i \partial^i A(\mathbf{x}) = \mathbf{e}'_i \partial'^i A(\mathbf{x})$ gilt.

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2ab, 2cd, 3ab, 3c-f