6. Tutorium - Lösungen **18.11.2016**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

6.1 Spektraltheorem für die nicht-orthogonale Basis

a) $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3x^1 - 2x^2 \\ 4x^1 + 3x^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \to (-3x^1 - 2x^2)x^2 = (4x^1 + 3x^2)x^1$

$\to 4x^1x^1 + 6x^1x^2 + 2x^2x^2 = 0 \to (2x^1 + x^2)(x^1 + x^2) = 0 \to x^2 = -2x^1$ oder $-x^1$

Wenn $x^2 = -2x^1$, $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x^1 \\ -2x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ -2x^1 \end{pmatrix} \to$ z.B. $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1 = 1$

($\mathbf{x}_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit einer beliebigen Konstante $C_1 (\neq 0)$ kann ein Rechtseigenvektor sein).

Wenn $x^2 = -x^1$, $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x^1 \\ -x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^1 \\ x^1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x^1 \\ -x^1 \end{pmatrix} \to$ z.B. $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_2 = -1$

($\mathbf{x}_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit einer beliebigen Konstante $C_2 (\neq 0)$ kann ein Rechtseigenvektor sein).

b) $\begin{pmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(Im Allgemeinen, $\mathbf{x}^1 = (1/C_1) \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{x}^2 = (1/C_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$)

c) $\mathbf{x}^1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathbf{x}^1$

$\mathbf{x}^2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \mathbf{x}^2$

d) $\mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \lambda_2\mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\to \mathbf{A} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}^2$

6.2 Differentialoperatoren

a) $\mathbf{x} = x'^i \mathbf{f}_i = x'^i \mathbf{e}_j t^j{}_i = x^j \mathbf{e}_j \to x^j = t^j{}_i x'^i$

$\frac{\partial}{\partial x'^i}\psi(\mathbf{x}) = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\psi(\mathbf{x}) = \frac{\partial t^j{}_k x'^k}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\psi(\mathbf{x}) = t^j{}_i \frac{\partial}{\partial x^j}\psi(\mathbf{x})$

b) $\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \mathbf{T}$

$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix}^{-1} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}^{-1} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix} \to \mathbf{f}^i = \mathbf{e}^j t^{*i}{}_j$

$\mathbf{x} = x'_i \mathbf{f}^i = x'_i \mathbf{e}^j t^{*i}{}_j = x_j \mathbf{e}^j \to x_j = t^{*i}{}_j x'_i$

$\frac{\partial}{\partial x'_i}\psi(\mathbf{x}) = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\psi(\mathbf{x}) = \frac{\partial t^{*k}{}_j x'_k}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\psi(\mathbf{x}) = t^{*i}{}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\psi(\mathbf{x})$

c) Aus (a) $\partial'_j x^i = t^k{}_j \partial_k x^i = t^k{}_j \delta^i{}_k = t^i{}_j$

Aus (b) $\partial^i \psi(\mathbf{x}) = t^i{}_k \partial'^k \psi(\mathbf{x}) \to \partial^i x'_j = t^i{}_k \partial'^k x'_j = t^i{}_j$

d) $\partial'^i \psi(\mathbf{x}) = (\partial'^i x'^j)\partial'_j \psi(\mathbf{x}) = (\partial'^i g'^{kj} x'_k)\partial'_j \psi(\mathbf{x}) = \delta^i{}_k g'^{kj} \partial'_j \psi(\mathbf{x}) = g'^{ij} \partial'_j \psi(\mathbf{x})$

6.3 Lokale Transformation

a) $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ mit $\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{y}}$ und $\mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{z}}$.
Infinitesimale Änderung von $\mathbf{x}$: $\mathbf{x} + \mathbf{dx} = \mathbf{x} + dx^i \mathbf{e}_i$.
Lokale Basistransformation (linearisierte Basistransformation für die infinitesimalen Änderung):

$$\mathbf{x} + \mathbf{dx} = \mathbf{x} + dx^i \mathbf{e}_i = \mathbf{x} + (\partial'_j x^i) dx'^j \mathbf{e}_i \equiv \mathbf{x} + dx'^j \mathbf{e}'_j. \text{ (mit } \mathbf{e}'_j = (\partial'_j x^i)\mathbf{e}_i)$$

Kugelkoordinaten: $x'^1 = r$, $x'^2 = \theta$, $x'^3 = \phi$
Transformation zwischen Kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten:

$$x^1 = r \sin\theta \cos\phi,\ x^2 = r\sin\theta\sin\phi \text{ und } x^3 = r\cos\theta.$$

$\mathbf{e}'_1 = \partial'_1 x^i \mathbf{e}_i = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_2 + \cos\theta\,\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}'_2 = \partial'_2 x^i \mathbf{e}_i = r\cos\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_1 + r\cos\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_2 - r\sin\theta\,\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}'_3 = \partial'_3 x^i \mathbf{e}_i = -r\sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_1 + r\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_2$
b)

$$(g'_{ij}) = (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

c)
$dx^i = (\partial'_j x^i) dx'^j$, $dx_i = (\partial'_j x_i) dx'^j$

$$dx^i dx_i = (\partial'_j x^i) dx'^j (\partial'_k x_i) dx'^k = (\partial'_j x^i) \underbrace{(\partial'_k x_i)}_{x_i = g_{il}x^l \text{wobei } g_{il}=\delta_{il} \text{für kartesische Koordinaten}} dx'^j dx'^k = (\partial'_j x^i)(\partial'_k x^i) dx'^j dx'^k = g'_{jk} dx'^j dx'^k$$

$= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$
$ds = \sqrt{dx^i dx_i} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2}$
d) $L = \oint_C ds\big|_{r=R,\theta=\pi/4} = \int_C \sqrt{\frac{R^2}{2}(d\phi)^2} = \frac{R}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \sqrt{2}\pi R$
e) $dx^i = \partial'_j x^i dx'^j$. Da dx'^j ein kontravarianter Vektor ist, wird der Vektor von $\mathbf{T}^{-1}$ transformiert, d.h. $dx'^j = t^{*j}{}_i dx^i$ oder die inverse Transformation $dx^i = t^i{}_j dx'^j$. $\to \partial'_j x^i = t^i{}_j$
$dx'_j = \partial^i x'_j dx_i$. Da dx'_j ein kovarianter Vektor ist, wird der Vektor von $\mathbf{T}$ transformiert, d.h. $dx'_j = t^i{}_j dx_i$. $\to \partial^i x'_j = t^i{}_j$
Altrnative Lösung :
$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \mathbf{T}$. Da $\mathbf{e}'_j = (\partial'_j x^i)\mathbf{e}_i$, gilt $t^i{}_j = \partial'_j x^i$

Duale Basis $\begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}^{-1} = \mathbf{T}\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix}^{-1} = \mathbf{T}\begin{pmatrix} \mathbf{e}'^1 \\ \mathbf{e}'^2 \\ \mathbf{e}'^3 \end{pmatrix}$

Da $\mathbf{e}^i = \partial^i x'_j \mathbf{e}'^j$, gilt $t^i{}_j = \partial^i x'_j$.
f) $\mathbf{e}_i \partial^i A(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i(\partial^i x'_j)\partial'^j A(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i t^i{}_j \partial'^j A(\mathbf{x}) = \mathbf{e}'_j \partial'^j A(\mathbf{x}) \equiv \nabla A(\mathbf{x})$