**7. Tutorium** **für 25.11.2016**

## 7.1 Residuensatz

Berechne für einen Kreis $C$ mit Radius 3 ($z = 3e^{i\theta}$ mit $0 \leq \theta < 2\pi$) in der komplexen Ebene die folgenden Integrale:
a) $\oint_C \frac{z}{z^2-z-2} dz$
b) $\oint_C \frac{1}{2z^2-4z-16} dz$
c) $\oint_C \frac{z^3+z^2+1}{2(z+1)^3} dz$
d) $\oint_C \frac{e^{2z}}{z(z-1)} dz$

## 7.2 Gaußscher Integralsatz

Die Koordinatentransformation zwischen kartesischen Koordinaten ($x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$) und Kugelkoordinaten ($x'^1 = r, x'^2 = \theta, x'^3 = \phi$) ist durch $(x, y, z) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta)$ definiert wobei $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Eine infinitesimale Änderung eines Vektors $\mathbf{x}$ ist mit der lokalen Transformation $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i = dx'^i \mathbf{e}'_i$ dargestellt. $\mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}'_i$ sind die Basisvektoren der kartesischen Koordinaten und der Kugelkoordinaten.
a) Betrachte eine Kugel $V = \{(r, \theta, \phi) | r \leq R, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi\}$ und ihre Oberfläche $F = \{(r, \theta, \phi) | r = R, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi\}$. Finde zwei Basisvektoren, die die Tangentialebene im Punkt $\mathbf{r} = (R \sin\theta \cos\phi, R \cos\theta \sin\phi, R \cos\theta)$ an die Fläche $F$ aufspannen, und schreibe den Vektor $\mathbf{r}_T - \mathbf{r}$ als Linearkombination der Basisvektoren, wobei $\mathbf{r}_T$ ein beliebiger Vektor in der Tangentialebene ist.
b) Berechne den Flächeninhalt $dF$ des Parallelogramms das von den Vektoren, $dx'^2 \mathbf{e}'_2$ und $dx'^3 \mathbf{e}'_3$, aufgespannt wird und zeige, dass $dF = \sqrt{\det(\tilde{\mathbf{g}}')} d\theta d\phi$ gilt wobei $\tilde{\mathbf{g}}' = \begin{pmatrix} g'_{22} & g'_{23} \\ g'_{32} & g'_{33} \end{pmatrix}$ und $g'_{ij}$ die Elemente des metrischen Tensors $\mathbf{g}'$ der Kugelkoordinaten sind.
c) Berechne für ein Vektorfeld $\mathbf{w} = 2r \sin\theta \cos\phi \mathbf{e}_1 + r \cos\theta \mathbf{e}_3$ das Oberflächenintegral

$$\int_F \mathbf{w} \cdot d\mathbf{F} = \int_F \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, dF$$

wobei $\mathbf{n}$ der normierte Normalenvektor $\mathbf{n}$ auf $F$ ist.
d) Berechne das Volumen $dV$ des Parallelepipeds das von den Vektoren, $dx'^1 \mathbf{e}'_1$, $dx'^2 \mathbf{e}'_2$ und $dx'^3 \mathbf{e}'_3$, aufgespannt wird und zeige, dass $dV = \sqrt{\det(\mathbf{g}')} dr d\theta d\phi$ gilt.
e) Berechne für das Vektorfeld $\mathbf{w}$ aus (c) das Volumenintegral

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{w} dV \, .$$

## 7.3 Cauchyscher Hauptwert

a) $C_1 = \{z = Re^{i\theta} \,|\, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ sei ein oberer Halbkreis mit Radius $R$ um den Ursprung in der komplexen Ebene. Berechne das Integral

$$\int_{C_1} \frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1} dz$$

im Limes $R \to \infty$.

b) $C_2 = \{z = re^{i\theta} + 1 \,|\, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ sei ein oberer Halbkreis mit Radius $r$ um den Punkt (1,0) in der komplexen Ebene. Berechne das Integral

$$\int_{C_2} \frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1} dz$$

im Limes $r \to 0$.

c) Berechne den Cauchyschen Hauptwert

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx \equiv \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[ \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx + \int_{-\infty}^{1-\varepsilon} \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx \right] .$$

---

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2a-c, 2de, 3ab, 3c