

## 8. Tutorium

für 9.12.2016

## 8.1 Delta-Distribution

Berechne die folgenden Integrale für die Delta-Distribution  $\delta(x)$  und die Heaviside-Funktion  $H(x)$ .

- a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(1 - 2x)(x^2 + 2x + 1)dx$   
 b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - 3x - 4)e^x dx$   
 c)  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(E - x^2 - y^2)dx dy$  ( $E$ : positive Konstante)  
 d)  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(E - x^2 - y^2)dx dy$  ( $E$ : positive Konstante)  
 e)  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(E - \sqrt{x^2 + y^2})dx dy$  ( $E$ : positive Konstante)

## 8.2 Verallgemeinerte Funktion

Berechne folgende Ausdrücke der verallgemeinerten Funktionen.

- a)  $\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right)(H(t)e^{-\gamma t})$   
 b)  $\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt}\right)(H(t)te^{-\gamma t})$   
 c)  $\frac{d}{dx} \sin|x|$   
 d)  $\frac{d^2}{dx^2} \sin|x|$   
 e)  $\int_0^{\infty} f'(x) \sin x dx$   $\left(f(x) = \begin{cases} \sin x & (|x| \leq \pi/2) \\ 0 & (|x| > \pi/2) \end{cases}\right)$

## 8.3 Greensche Funktion

a) Betrachte eine inhomogene Differentialgleichung  $\mathcal{L}_t y(t) = \delta(t - t')$  wobei der Operator  $\mathcal{L}_t$  durch

$$\mathcal{L}_t y(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2i\frac{d}{dt} - 2\right) y(t)$$

definiert ist. Finde eine Greensche Funktion  $G_I(t, t')$ , die die inhomogene Differentialgleichung erfüllt.

b) Eine Lösung der Differentialgleichung  $\mathcal{L}_t y(t) = f(t)$  ist durch

$$y_I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_I(t, t') f(t') dt'$$

gegeben. Berechne  $y_I(t)$  für  $f(t) = e^{i\omega_0 t} H(t)$  und überprüfe ob  $y_I(t)$  die Randbedingung  $y_I(t < 0) = 0$  erfüllt.

c) Finde eine Funktion, die die homogene Differentialgleichung  $\mathcal{L}_t y_0(t) = 0$  erfüllt und bestimme die Konstante  $A$ , sodass die Funktion  $y(t) = y_I(t) + Ay_0(t)$  die Randbedingung  $y_I(t < 0) = 0$  erfüllt.