8. Tutorium - Lösungen **9.12.2016**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

8.1 Delta-Distribution

a) $t = 1 - 2x \to x = (1-t)/2$ und $dx = (-1/2)dt$
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(1-2x)(x^2+2x+1)dx = \int_{\infty}^{-\infty} \delta(t)((1-t)^2/4 + (1-t) + 1)(-1/2)dt$
$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)(1/2)((1-t)^2/4 + (1-t)+1)dt = (1/2)(1/4+1+1) = 9/8$
b) $t = x^2 - 3x - 4 \to x_1(t) = (3-\sqrt{25+4t})/2$ oder $x_2(t) = (3+\sqrt{25+4t})/2$
Für $-25/4 < t < \infty$, $3 > x_1(t) > -\infty$ und $3 < x_2(t) < \infty$
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2-3x-4)e^x dx = \int_{-\infty}^{3} \delta(x^2-3x-4)e^x dx + \int_{3}^{\infty} \delta(x^2-3x-4)e^x dx$
$= -\int_{-25/4}^{\infty} \delta(t)e^{x_1(t)} \frac{1}{2x_1(t)-3}dt + \int_{-25/4}^{\infty} \delta(t)e^{x_2(t)}\frac{1}{2x_2(t)-3}dt = -e^{-1}(-1/5) + e^4(1/5) = (e^{-1}+e^4)/5$
c) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(E-x^2-y^2)dxdy$ ist die Fläche eines Kreises mit Radius $\sqrt{E}$. $\to \pi E$
Alternative Lösung: $E - x^2 - y^2 > 0$ mit Polarkoordinaten $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta \to 0 < r < \sqrt{E}$
$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(E-x^2-y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{E}} rdrd\theta = \int_0^{2\pi}(E/2)d\theta = \pi E$
d) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(E-x^2-y^2)dxdy = \frac{d}{dE}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(E-x^2-y^2)dxdy = \frac{d}{dE}(\pi E) = \pi$
Alternative Lösung mit Polarkoordinaten:
$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(E-x^2-y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\delta(E-r^2)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{E}\frac{1}{2\sqrt{E}}d\theta = \pi$
e) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(E-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$ ist ein Kreisumfang mit Radius $E \to 2\pi E$
Alternative Lösung mit Polarkoordinaten:
$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(E-\sqrt{x^2+y^2})dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\delta(E-r)rdrd\theta = \int_0^{2\pi} Ed\theta = 2\pi E$

8.2 Verallgemeinerte Funktion

a) $\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)(H(t)e^{-\gamma t}) = \delta(t)e^{-\gamma t} - \gamma H(t)e^{-\gamma t} + \gamma H(t)e^{-\gamma t} = \delta(t)$
Anmerkung : $G(t,t') = H(t-t')e^{-\gamma(t-t')}$ ist eine Greensche Funktion des Operators $\mathcal{L}_t = \frac{d}{dt}+\gamma$.
b) $\left(\frac{d^2}{dt^2}+2\gamma\frac{d}{dt}\right)(H(t)te^{-\gamma t}) = \left(\frac{d}{dt}+2\gamma\right)\left(\delta(t)\underbrace{te^{-\gamma t}}_{=0} + H(t)e^{-\gamma t} - \gamma H(t)te^{-\gamma t}\right)$
$= \delta(t)e^{-\gamma t} - \gamma H(t)e^{-\gamma t} - \gamma\delta(t)te^{-\gamma t} - \gamma H(t)e^{-\gamma t} + \gamma^2 H(t)te^{-\gamma t} + 2\gamma H(t)e^{-\gamma t} - 2\gamma^2 H(t)te^{-\gamma t}$
$= \delta(t) - \gamma^2 H(t)te^{-\gamma t}$
Anmerkung : $G(t,t') = H(t-t')(t-t')e^{-\gamma(t-t')}$ ist eine Greensche Funktion des Operators $\mathcal{L}_t = \frac{d^2}{dt^2}+2\gamma\frac{d}{dt}+\gamma^2$.
c) $\frac{d}{dx}\sin|x| = \frac{d}{dx}(H(x)\sin x - H(-x)\sin x) = \delta(x)\sin x + H(x)\cos x + \delta(-x)\sin x - H(-x)\cos x$
$= H(x)\cos x - H(-x)\cos x = \mathrm{sgn}(x)\cos x$
d) $\frac{d^2}{dx^2}\sin|x| = \frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x)\cos x = \frac{d}{dx}(2H(x)-1)\cos x = 2\delta(x)\cos x - (2H(x)-1)\sin(x) = 2\delta(x) - \mathrm{sgn}(x)\sin(x)$ (oder $= 2\delta(x) - \sin|x|$)
e) $\int_0^{\infty} f'(x)\sin x dx = f(x)\sin x|_{x=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} f(x)\cos x dx = -\int_0^{\pi/2}\sin x\cos x dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2x dx = -\frac{1}{2}$
Alternative Lösung
$f(x) = H(\pi/2+x)H(\pi/2-x)\sin x$
$\to f'(x) = H(\pi/2+x)H(\pi/2-x)\cos x + \delta(\pi/2+x)H(\pi/2-x)\sin x - H(\pi/2+x)\delta(\pi/2-x)\sin x$
$= H(\pi/2+x)H(\pi/2-x)\cos x - \delta(\pi/2+x)H(\pi/2-x) - H(\pi/2+x)\delta(\pi/2-x)$
$\int_0^{\infty} f'(x)\sin x dx$
$= \int_0^{\infty} H(\pi/2+x)H(\pi/2-x)\cos x\sin x dx - \int_0^{\infty}\delta(\pi/2+x)H(\pi/2-x)\sin x dx - \int_0^{\infty} H(\pi/2+x)\delta(\pi/2-x)\sin x dx$
$= \int_0^{\pi/2}\cos x\sin x dx - 0 - \int_0^{\infty}\delta(\pi/2-x)\sin x dx = -1/2$

8.3 Greensche Funktion

Ansatz : $G_I(t,t') = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}_I(\omega)\,e^{i\omega(t-t')}d\omega$

$\mathcal{L}_t G_I(t,t') = \delta(t-t') \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-\omega^2-2\omega-2)\tilde{G}_I(\omega)\,e^{i\omega(t-t')}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-t')}d\omega$

Vergleich der Integranden: $(-\omega^2-2\omega-2)\tilde{G}_I(\omega) = 1 \to \tilde{G}_I(\omega) = -\frac{1}{\omega^2+2\omega+2} = -\frac{1}{(\omega+1+i)(\omega+1-i)}$

Fourier-Transformation $G_I(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega+1+i)(\omega-1+i)}d\omega$

Das Integral kann mit $\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega = \oint_{C_1}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega - \int_{\tilde{C}_1}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega$ oder $-\oint_{C_2}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega + \int_{\tilde{C}_2}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega$ gerechnet werden. Hier $\tilde{C}_1 = \{z = re^{i\theta}|r = R, 0 < \theta < \pi\}$ ist der obere Halbkreis und $\tilde{C}_2 = \{z = re^{i\theta}|r = R, \pi < \theta < 2\pi\}$ ist der untere Halbkreis. C_1 und C_2 sind der geschlossene Halbkreis der den Pfad $\{z = re^{i\theta}| -R < r < R, \theta = 0\}$ enthalten.

Auf den Halbkreisen glit $|e^{i\omega(t-t')}| = |\exp(iRe^{i\theta}(t-t'))| = |\exp([i\mathrm{Re}(Re^{i\theta}) - \mathrm{Im}(Re^{i\theta})](t-t'))|$ $= |\exp(-\mathrm{Im}(Re^{i\theta})(t-t'))|$. Im Limes $R\to\infty$, $|e^{i\omega(t-t')}| \to 0$ auf dem oberen Halbkreis $\tilde{C}_1$ (d.h. $\mathrm{Im}(Re^{i\theta}) > 0$) wenn $t > t'$ oder auf dem unteren Halbkreis $\tilde{C}_2$ (d.h. $\mathrm{Im}(Re^{i\theta}) < 0$) wenn $t < t'$.

Da $\lim_{R\to\infty}\tilde{G}_I(\omega) = 0$, gilt $\int_{\tilde{C}_1}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega \to 0$ wenn $t > t'$ und $\int_{\tilde{C}_2}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega \to 0$ wenn $t < t'$.

Deswegen ist die Rechnung des Integrals ist leichter mit

$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega = \oint_{C_1}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega - \int_{\tilde{C}_1}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega$ für $t > t'$ und

$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega = -\oint_{C_2}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega + \int_{\tilde{C}_2}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega$ für $t < t'$.

Mit Hilfe des Residuensatzes und im Limes $R\to\infty$,

$G_I(t,t') = \frac{1}{2\pi}H(t-t')\oint_{C_1}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega - \frac{1}{2\pi}H(t'-t)\oint_{C_2}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega$

$= -iH(t-t')\left.\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+1+i}\right|_{\omega=-1+i} + iH(t'-t)\left.\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+1-i}\right|_{\omega=-1-i} = -\frac{1}{2}H(t-t')e^{(-1-i)(t-t')} - \frac{1}{2}H(t'-t)e^{(1-i)(t-t')}$

$= -\frac{1}{2}e^{-|t-t'|}e^{-i(t-t')}$

b) $y_I(t) = \int_{-\infty}^{\infty}G_I(t,t')f(t')dt' = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-|t-t'|}e^{-i(t-t')}e^{i\omega_0 t'}dt'$

Wenn $t > 0$

$y_I(t) = -\frac{1}{2}\int_t^{\infty}e^{-t'+t}e^{-i(t-t')}e^{i\omega_0 t'}dt' - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-t+t'}e^{-i(t-t')}e^{i\omega_0 t'}dt'$

$= -\frac{1}{2}e^t e^{-it}\int_t^{\infty}e^{(-1+i+i\omega_0)t'}dt' - \frac{1}{2}e^{-t}e^{-it}\int_0^t e^{(1+i+i\omega_0)t'}dt'$

$= \frac{1}{2}e^t e^{-it}\frac{e^{(-1+i+i\omega_0)t}}{-1+i+i\omega_0} - \frac{1}{2}e^{-t}e^{-it}\frac{e^{(1+i+i\omega_0)t}}{1+i+i\omega_0} + \frac{1}{2}e^{-t}e^{-it}\frac{1}{1+i+i\omega_0}$

$= \frac{1}{2}\frac{e^{i\omega_0 t}}{-1+i+i\omega_0} - \frac{1}{2}\frac{e^{i\omega_0 t}}{1+i+i\omega_0} + \frac{1}{2}e^{-(1+i)t}\frac{1}{1+i+i\omega_0} = -\frac{e^{i\omega_0 t}}{\omega_0^2+2\omega_0} + \frac{1}{2}e^{-(1+i)t}\frac{1}{1+i+i\omega_0}$

Wenn $t < 0$

$y_I(t) = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-t'+t}e^{-i(t-t')}e^{i\omega_0 t'}dt' = -\frac{1}{2}e^t e^{-it}\int_0^{\infty}e^{(-1+i+i\omega_0)t'}dt' = \frac{1}{2}e^{(1-i)t}\frac{1}{-1+i+i\omega_0}$

$\to y_I(t<0) \neq 0$

c) homogene Differentialgleichung: $\mathcal{L}_t G_0(t,t') = 0$

Fouriertransformation : $-(\omega+1+i)(\omega+1-i)\tilde{G}_0(\omega) = 0$

$\to \tilde{G}_0(\omega)$ muss außer $\omega = -1\pm i$ null sein. $\to \tilde{G}_0(\omega) = c_1\delta(\omega+1-i) + c_2\delta(\omega+1+i)$.

$\to G_0(t,t') = C_1 e^{(-1-i)(t-t')} + C_2 e^{(1-i)(t-t')}$ mit $C_1 = c_1/(2\pi)$ und $C_2 = c_2/(2\pi)$.

$y_1(t) = \int_0^{\infty}e^{(-1-i)(t-t')}e^{i\omega_0 t'}dt' = e^{-(1+i)t}\int_0^{\infty}e^{(1+i+i\omega_0)t'}dt' = \infty$

$y_2(t) = \int_0^{\infty}e^{(1-i)(t-t')}e^{i\omega_0 t'}dt' = e^{(1-i)t}\int_0^{\infty}e^{(-1+i+i\omega_0)t'}dt' = -e^{(1-i)t}\frac{1}{-1+i+i\omega_0}$

$\to y(t) = y_I(t) + \frac{1}{2}y_2(t) = 0$ wenn $t < 0$

und wenn $t > 0$

$y(t) = y_I(t) + \frac{1}{2}y_2(t) = -\frac{e^{i\omega_0 t}}{\omega_0^2+2\omega_0} + \frac{1}{2}e^{-(1+i)t}\frac{1}{1+i+i\omega_0} - \frac{1}{2}e^{(1-i)t}\frac{1}{-1+i+i\omega_0} = -\frac{e^{i\omega_0 t}}{\omega_0^2+2\omega_0} + \frac{1}{2}e^{-it}\left(\frac{e^{-t}}{1+i+i\omega_0} - \frac{e^t}{-1+i+i\omega_0}\right)$

Anmerkung : Die Greensche Funktion, die die Randbedingung erfült ist

$G(t,t') = G_I(t,t') + (1/2)e^{(1-i)(t-t')} = \frac{1}{2}e^{-i(t-t')}H(t-t')(e^{t-t'} - e^{-(t-t')})$

Die Lösung $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty}G_I(t,t')f(t')dt' = \int_{-\infty}^{t}G_I(t,t')f(t')dt'$ ist nur von der Vergangenheit $y(t')$ mit $t' < t$ bestimmt aber hat keinen Einfluss von der Zukunft $t' > t$ (Kausalität).

Alternative Lösung :

homogene Differentialgleichung: $\mathcal{L}_t y_0(t) = 0$

Fouriertransformation : $y_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{y}_0(\omega)e^{i\omega t}dt$

$\to -(\omega+1+i)(\omega+1-i)\tilde{y}_0(\omega) = 0 \to \tilde{y}_0(\omega)$ muss außer $\omega = -1\pm i$ null sein.

$\to \tilde{y}_0(\omega) = c_1\delta(\omega+1-i) + c_2\delta(\omega+1+i) \to y_0(t) = C_1 e^{-(1+i)t} + C_2 e^{(1-i)t}$

Mit $C_1 = 0$ und $C_2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{-1+i+i\omega_0}$, $y(t<0) = 0$ und wenn $t > 0$

$y(t) = y_I(t) + y_0(t) = -\frac{e^{i\omega_0 t}}{\omega_0^2+2\omega_0} + \frac{1}{2}e^{-it}\left(\frac{e^{-t}}{1+i+i\omega_0} - \frac{e^t}{-1+i+i\omega_0}\right)$