9. Tutorium **für 16.12.2016**

9.1 Sturm-Liouville-Problem

a) Transformiere die Differentialgleichung $2y'' + 4y' + 3y = 0$ in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)\right) y(x) = 0$.
b) Transformiere die Differentialgleichung aus (a) in die Liouville'sche Normalform $-w''(x) + v(x)w(x) = 0$.
c) Schreibe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung aus (a) an.
d) Transformiere die Differentialgleichung $-y'' - (1/x)y' + \frac{m^2}{x^2}y = \lambda y$ in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right) y(x) = 0$ (λ: Konstante).
e) Transformiere die Differentialgleichung aus (d) in die Liouville'sche Normalform $-w''(x) + (v(x) - \lambda)w(x) = 0$.

9.2 Separationsansatz

Führe den Separationsansatz der Differentialgleichung

$$\left[\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\right]\psi(r,\theta,\phi) = -2E\psi(r,\theta,\phi)\,.$$

durch und schreibe die Differentialgleichungen der r-Koordinate, der θ-Koordinate, und der ϕ-Koordinate an.

9.3 Greensche Funktion

Die Greensche Funktion $G(t,t')$ des Differentialoperators

$$\mathcal{L} = \left(\frac{d}{dt} - iE_1\right)\left(\frac{d}{dt} - iE_2\right)$$

(E_1, E_2 : reell) kann als dem Grenzwert $G(t,t') = \lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(t,t')$ berechnet werden. Hier ist $G_\varepsilon(t,t')$ die Greensche Funktion des Differentialoperators

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \left(\frac{d}{dt} - i(E_1 + i\varepsilon)\right)\left(\frac{d}{dt} - i(E_2 + i\varepsilon)\right)\,.$$

a) Berechne für $\varepsilon > 0$ eine Greensche Funktion $G^+(t,t') = \lim_{\varepsilon\to 0^+} G_\varepsilon(t,t')$, die die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}G^+(t,t') = \delta(t-t')$ erfüllt.
b) Berechne für $\varepsilon < 0$ eine Greensche Funktion $G^-(t,t') = \lim_{\varepsilon\to 0^-} G_\varepsilon(t,t')$, die die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}G^-(t,t') = \delta(t-t')$ erfüllt.
c) Überprüfe, dass $G_0(t,t') = G^+(t,t') - G^-(t,t')$ die homogene Differentialgleichung $\mathcal{L}G_0(t,t') = 0$ erfüllt.

Ankreuzbar: 1a-c, 1de, 2, 3a, 3b, 3c