9. Tutorium - Lösungen **16.12.2016**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

9.1 Sturm-Liouville-Problem

a) $2y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt : $p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$
$\to p'(x)/p(x) = 4/2$ und $q(x)/p(x) = 3/2 \to p(x) = e^{2x}$ und $q(x) = (3/2)e^{2x}$
$\to \left(\frac{d}{dx}\left[e^{2x}\frac{d}{dx}\right] + \frac{3}{2}e^{2x}\right)y(x) = 0$
b) Ansatz: $y(x) = w(x)u(x)$
$\to 2y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 2(w''u + wu'' + 2w'u') + 4(w'u + wu') + 3wu = (2u)w'' + (4u' + 4u)w' + (2u'' + 4u' + 3u)w$
In der Liouville'schen Normalenform muss der 2. Term null sein: $4u' + 4u = 0 \to u = e^{-x}$
Die Differentialgleichung ist $2e^{-x}w'' + (2 - 4 + 3)e^{-x}w = 0 \to -w'' - \frac{1}{2}w = 0$
c) Allgemeine Lösung : $w(x) = c_1 e^{ix/\sqrt{2}} + c_2 e^{-ix/\sqrt{2}}$
$\to y(x) = u(x)w(x) = (c_1 e^{ix/\sqrt{2}} + c_2 e^{-ix/\sqrt{2}})e^{-x}$
d) $-y'' - (1/x)y' + \frac{m^2}{x^2}y = \lambda y$
Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt : $p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0$
Vergleich $p'/p = 1/x$, $q/p = -m^2/x^2$ und $\rho/p = 1$
$\to p(x) = \exp(\int(1/x)dx) = \exp(\ln x) = x$, $q = -m^2/x^2 p = -m^2/x$ und $\rho = p = x$.
$\to \frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)y(x) - \frac{m^2}{x}y(x) + \lambda x y(x) = 0$
e) Ansatz: $y(x) = w(x)u(x)$
$-y'' - (1/x)y' = -w''u - wu'' - 2w'u' - (1/x)(w'u + wu') = -uw'' - ((1/x)u + 2u')w' - (u'' + (1/x)u')$
Liouville'sche Normalenform : $(1/x)u + 2u' = 0 \to u = \exp(-\int 1/(2x)dx) = 1/\sqrt{x}$
$-y'' - (1/x)y' + \frac{m^2}{x^2}y - \lambda y = -\frac{1}{x^{1/2}}w'' - \left[\frac{3}{4x^{5/2}} - \frac{1}{2x^{5/2}} - \frac{m^2}{x^{5/2}} + \lambda\frac{1}{x^{1/2}}\right]w = \frac{1}{x^{1/2}}\left(-w'' + \frac{m^2 - 1/4}{x^2}w - \lambda w\right)$
$\to -w'' + \frac{m^2 - 1/4}{x^2}w = \lambda w$

9.2 Separationsansatz

Ansatz: $\psi(\mathbf{x}) = R(r)P(\theta)F(\phi)$
Differentialgleichung $(\mathcal{L}_r R)PF + r^{-2}(\mathcal{L}_\theta P)RF + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(\mathcal{L}_\phi F)RP = -2ERPF$
mit $\mathcal{L}_r = r^{-2}\partial_r(r^2\partial_r)$, $\mathcal{L}_\theta = \sin^{-1}\theta\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)$, und $\mathcal{L}_\phi = \partial_\phi^2$.
multiplizieren mit $r^2/(RPF)$: $r^2R^{-1}\mathcal{L}_r R + P^{-1}\mathcal{L}_\theta P + \frac{1}{\sin^2\theta}F^{-1}\mathcal{L}_\phi F = -2Er^2$
$\to r^2R^{-1}\mathcal{L}_r R + 2Er^2 = -P^{-1}\mathcal{L}_\theta P - \frac{1}{\sin^2\theta}F^{-1}\mathcal{L}_\phi F$
linke Seite: Funktion von r, rechte Seite: Funktion von θ, ϕ
$\to$ Die Gleichung gilt nur wenn die beide Seiten konstant sind (unabhängig von r, θ, ϕ).
$r^2R^{-1}\mathcal{L}_r R + 2Er^2 = Z_1 \to \mathcal{L}_r R - Z_1/r^2 R + 2ER = 0$
$-P^{-1}\mathcal{L}_\theta P - \frac{1}{\sin^2\theta}F^{-1}\mathcal{L}_\phi F = Z_1$
multiplizieren mit $-\sin^2\theta$
$\sin^2\theta P^{-1}\mathcal{L}_\theta P + Z_1\sin^2\theta = -F^{-1}\mathcal{L}_\phi F$
Die Gleichung gilt nur wenn die beide Seiten konstant sind (unabhängig von θ, ϕ).
$\sin^2\theta P^{-1}\mathcal{L}_\theta P + Z_1\sin^2\theta = Z_2 \to \mathcal{L}_\theta P + Z_1 P - \frac{Z_2}{\sin^2\theta}P = 0$
und
$\mathcal{L}_\phi F = -Z_2 F$

9.3 Greensche Funktion

a)
$\tilde{G}_I(\omega) = -\frac{1}{(\omega-E_1)(\omega-E_2)}$
$G_I^+(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega)e^{i\omega(t-t')}d\omega = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega-E_1)(\omega-E_2)}e^{i\omega(t-t')}d\omega$
Das Integral wird mit einer Verschiebung der Pole bei $i\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) berechnet.
$G_I^+(t,t') = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega-E_1-i\varepsilon)(\omega-E_2-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega$
$= -iH(t-t')\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{E_1-E_2}e^{i(E_1+i\varepsilon)(t-t')} + \frac{1}{E_2-E_1}e^{i(E_2+i\varepsilon)(t-t')}\right)$
$= -iH(t-t')\frac{1}{E_1-E_2}\left(e^{iE_1(t-t')} - e^{iE_2(t-t')}\right)$
$= -iH(t-t')\frac{1}{E_1-E_2}e^{i(E_1+E_2)(t-t')/2}\left(e^{i(E_1-E_2)(t-t')/2} - e^{-i(E_1-E_2)(t-t')/2}\right)$
$= 2H(t-t')\frac{1}{E_1-E_2}e^{i(E_1+E_2)(t-t')/2}\sin\left(\frac{1}{2}(E_1-E_2)(t-t')\right)$
b)
$G_I^-(t,t') = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega-E_1-i\varepsilon)(\omega-E_2-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega$
$= iH(t'-t)\lim_{\varepsilon\to 0^-}\left(\frac{1}{E_1-E_2}e^{i(E_1+i\varepsilon)(t-t')} + \frac{1}{E_2-E_1}e^{i(E_2+i\varepsilon)(t-t')}\right)$
$= iH(t'-t)\frac{1}{E_1-E_2}\left(e^{iE_1(t-t')} - e^{iE_2(t-t')}\right)$
$= iH(t'-t)\frac{1}{E_1-E_2}e^{i(E_1+E_2)(t-t')/2}\left(e^{i(E_1-E_2)(t-t')/2} - e^{-i(E_1-E_2)(t-t')/2}\right)$
$= -2H(t'-t)\frac{1}{E_1-E_2}e^{i(E_1+E_2)(t-t')/2}\sin\left(\frac{1}{2}(E_1-E_2)(t-t')\right)$
c) $G_0(t,t') = G^+(t,t') - G^-(t,t')$
$= 2H(t-t')\frac{1}{E_1-E_2}e^{i(E_1+E_2)(t-t')/2}\sin\left(\frac{1}{2}(E_1-E_2)(t-t')\right) + 2H(t'-t)\frac{1}{E_1-E_2}e^{i(E_1+E_2)(t-t')/2}\sin\left(\frac{1}{2}(E_1-E_2)(t-t')\right)$
$= \frac{2}{E_1-E_2}e^{i(E_1+E_2)(t-t')/2}\sin\left(\frac{1}{2}(E_1-E_2)(t-t')\right)$
$\frac{d}{dt}G_0(t,t') = i\frac{E_1+E_2}{2}G_0(t,t') + e^{i(E_1+E_2)(t-t')/2}\cos\left(\frac{1}{2}(E_1-E_2)(t-t')\right)$
$\left(\frac{d}{dt} - iE_2\right)G_0(t,t') = i\frac{E_1-E_2}{2}G_0(t,t') + e^{i(E_1+E_2)(t-t')/2}\cos\left(\frac{1}{2}(E_1-E_2)(t-t')\right)$
$= ie^{i(E_1+E_2)(t-t')/2}\sin\left(\frac{1}{2}(E_1-E_2)(t-t')\right) + e^{i(E_1+E_2)(t-t')/2}\cos\left(\frac{1}{2}(E_1-E_2)(t-t')\right)$
$= e^{i(E_1+E_2)(t-t')/2}e^{i(E_1-E_2)(t-t')/2} \equiv= F(t,t')$
$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - iE_2\right)G_0(t,t') = i\frac{E_1+E_2}{2}F(t,t') + i\frac{E_1-E_2}{2}F(t,t')$
$= iE_1F(t,t')$
$\left(\frac{d}{dt} - iE_1\right)\left(\frac{d}{dt} - iE_2\right)G_0(t,t') = 0$