Name: Tutoriumsgruppe: Matr. Nr.:

Anzahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

1. Test, 1. 12. 2017, 2017W

1 Rechenbeispiele (30 Punkte)

(6 Punkte pro Frage)

a) Vereinfachen und berechnen Sie

$$\partial_i \frac{1}{\sqrt{x_j x_j}}$$

für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik.

b) Berechnen Sie

$$\delta^i{}_i \delta^j{}_j - \delta^i{}_j \delta^j{}_k \delta^k{}_i$$

in d-Dimensionen.

c) Berechnen Sie die dualen Vektoren zur Basis

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

d) Berechnen Sie $\varepsilon_{ijk} a^i{}_1 a^j{}_2 a^k{}_3$ wobei $a^i{}_j = g^{ik} g_{kj}$. ($\mathbf{g} = (g_{kj})$ und $\mathbf{g}^* = (g^{ik})$ sind die metrischen Tensoren eines Koordinatensystems in 3-Dimensionen.)

e) Berechnen Sie für einen Einheitskreis $C = \{z = e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$

$$\oint_C \frac{2z}{4z+1} dz\,.$$

BITTE WENDEN

2 Spektraltheorem (35 Punkte)

a) Berechnen Sie die Eigenwerte, λ_1 und λ_2 ($\lambda_2 > \lambda_1$), der Matrix

$$\mathbf{A} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Projektoren $\mathbf{E}_i$ ($i = 1, 2$) auf den Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ der Matrix $\mathbf{A}$ (bzw. auf die Eigenräume mit den Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$).
c) Berechnen Sie die Elemente der Matrix $\mathbf{B} = e^{\mathbf{A}}$.
d) Berechnen Sie den Kommutator $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$.

3 Lokale Transformation (35 Punkte)

In einer kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ist eine infinitesimale Änderung des Vektors $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ durch $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i$ gegeben.
a) Mit den Polarkoordinaten $(x'^1, x'^2) = (r, \theta)$ und der entsprechenden Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ wird die infinitesimale Änderung in die Form $\mathbf{dx} = dx'^i \mathbf{e}'_i$ umgeschrieben. Berechnen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ zwischen den Basisvektoren wobei $\mathbf{S} = (s^j{}_i)$ durch $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_j s^j{}_i$ definiert ist. Die Koordinatentransformation ist durch $(x^1, x^2) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ gegeben.
b) Berechnen Sie die metrischen Tensoren $\mathbf{g}' = (g'_{ij})$ und $\mathbf{g}'^* = (g'^{ij})$ der Polarkoordinaten.
c) Berechnen Sie die Länge $L = \oint_{C_1} ds$ einer Kurve $C_1 = \{(r = a, \theta = 2\pi t^2) | 0 \leq t \leq 1\}$ wobei a eine positive Konstante ist. (Die Integration muss in den Polarkoordinaten durchgeführt werden.)
d) Berechnen Sie für ein Vektorfeld $\mathbf{w} = \sin^2\theta \mathbf{e}'_1 - r^{-2}\cos^2\theta \mathbf{e}'_2$ und eine Kurve $C_2 = \{(r, \theta) | r = 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ das Integral

$$\oint_{C_2} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s}\,.$$