Name: Tutoriumsgruppe: Matr. Nr.:

Anzahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

2. Test, 19. 1. 2018, 2017W

1 Rechenbeispiele (30 Punkte)

(6 Punkte pro Frage)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a)

$$\int_0^\infty (\delta(x-1) + \delta(x+1))e^x dx$$

b)

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \delta(E - x^2 - y^2) dx dy \qquad (E > 0)$$

c)

$$\int_0^\infty f'(x) \sin x dx \qquad \text{mit} \qquad f(x) = \begin{cases} \sin x & (|x| \leq \pi/2) \\ 0 & (|x| > \pi/2) \end{cases}$$

d)

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx$$

e)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta$$

Hinweise: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $z! = \Gamma(z+1)$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$, $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$

BITTE WENDEN

2 Greensche Funktion (40 Punkte)

a) Betrachten Sie eine Differentialgleichung $\mathcal{L}_t y(t) = f(t)$ wobei der Operator $\mathcal{L}_t$ durch

$$\mathcal{L}_t y(t) = \left(\frac{d}{dt} + 1 - i\right)\left(\frac{d}{dt} - 1 - i\right) y(t)$$

definiert ist. Berechnen Sie eine Greensche Funktion $G_I(t,t')$, die die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G_I(t,t') = \delta(t-t')$ erfüllt.
b) Berechnen Sie $\mathcal{L}_t G_I(t,t')$ für die Greensche Funktion aus (a) und überprüfen Sie, dass gilt $\mathcal{L}_t G_I(t,t') = \delta(t-t')$.
c) Lösen Sie die Differentialgleichung $\mathcal{L}_t y(t) = \delta(t-T)$ mit den Randbedingungen $y(t=0) = 0$ und $y'(t=0) = 0$ auf $t \in [0,\infty)$ und für $T > 0$.

3 Differentialgleichung (30 Punkte)

a) Transformieren Sie die Differentialgleichung

$$4x^2 y''(x) + 8xy'(x) + (4x + 1 + 4\lambda x^2)y(x) = 0\,, \qquad (x \in [0,\infty))$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right) y(x) = 0$.
b) Transformieren Sie die Differentialgleichung aus (a) in die Liouville'sche Normalform $-w''(x) + (v(x) - \lambda)w(x) = 0$.
c) Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$ ($a_0 \neq 0$) für die Differentialgleichung in der Liouville'schen Normalform aus (b) und finden Sie eine Lösung $w(x)$ der Differentialgleichung mithilfe der Frobenius-Methode. Schließlich schreiben Sie eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung aus (a).