1. Tutorium **für 20.10.2017**

Informationen zu den Übungen

- Die Beispiele sind online in TUWEL bis Freitag, 00:00Uhr, anzukreuzen! Eine spätere Änderung der Kreuze ist nicht mehr möglich.
- Die Anzahl der angekreuzten Beispiele geht in die Endnote ein. Mindestens 50% aller Beispiele müssen angekreuzt werden, aber je mehr, desto besser. Die Tafelleistung wird mit „OK“ oder „nicht vorbereitet“ bewertet. In letzterem Fall werden alle Kreuze des Tages gestrichen. Zum Bestehen der Übung ist mindestens eine positive Tafelleistung notwendig. Sieh die Übung als gute Gelegenheit, Unklarheiten bei den Beispielen zu klären. Nütze die Gelegenheit, um Fragen zu stellen!
- Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!
- In dieser Übung werden mathematische Grundlagen vermittelt, die später vor allem in „Elektrodynamik“ und „Quantentheorie“ zur Anwendung kommen, aber auch in anderen Vorlesungen und Übungen nützlich sein werden. Es zahlt sich also aus, von Anfang an eifrig mitzuarbeiten! :)

1.1 Indexschreibweise

In einer orthonormalen Basis werden die Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und die Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, und $\mathbf{C}$ mit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

und

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

dargestellt.
a) Schreibe in Indexschreibweise das innere Produkt $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ mit der Einsteinschen Summenkonvention.
b) Schreibe in Indexschreibweise die i-te Komponente des Vektors $\mathbf{Ax}$.
c) Schreibe in Indexschreibweise die i-te Komponente des Vektors $\mathbf{A}^T\mathbf{x}$.
d) Schreibe in Indexschreibweise die i-te Komponente des Vektors $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T$.
e) Schreibe in Indexschreibweise $\mathrm{Sp}(\mathbf{ABC})$ und $\mathrm{Sp}(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\mathbf{C}^T)$.
f) Schreibe in Matrixform $a_{ik}b_{jj}c_{ik}$.

1.2 Transformationsmatrix

Die Koordinaten eines Vektors $\mathbf{x}$ sind in einer orthonormalen Basis, $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, durch $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gegeben. Der Vektor soll in einer anderen orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ dargestellt werden. Die neuen Basisvektoren sind durch $\mathbf{e}'_1 = (1/\sqrt{5})(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2)$ und $\mathbf{e}'_2 = (1/\sqrt{5})(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ definiert.

a) $\mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}'_i$ $(i = 1, 2)$ seien Spaltenvektoren. Die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ zwischen den Basen ist durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}$$

definiert. Schreibe die Matrix $\mathbf{S}$ an.

b) (x'_1, x'_2) seien die neuen Koordinaten in der neuen Basis, d.h. $\mathbf{x} = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2$. Berechne die Koordinaten (x'_1, x'_2) wenn $x_1 = x_2 = 1$.

c) Die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ zwischen den Koordinaten ist durch

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

definiert. Zeige, dass $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$ und berechne die Matrix $\mathbf{T}$.

d) Zeige für einen beliebigen Vektor $\mathbf{x}$, $x_i x_i = x'_i x'_i$.

1.3 Transformation auf nicht-orthonormale Basis

Die Koordinaten eines Vektors $\mathbf{x}$ sind in einer orthonormalen Basis, $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ durch $\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2$ gegeben. Der Vektor soll in einer nicht-orthogonalen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ dargestellt werden (d.h. $\mathbf{x} = x'^1\mathbf{f}_1 + x'^2\,\mathbf{f}_2$) Die neuen Basisvektoren sind durch $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ definiert.

a) Schreibe die Matrix $\mathbf{S}$ an und berechne die Matrix $\mathbf{T}$, wobei

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S} \text{ und } \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

b) Gegeben sei $(x^1, x^2) = (2, 1)$. Berechne die Koordinaten (x'^1, x'^2) des Vektors $\mathbf{x}$ bezüglich der neuen Basisvektoren $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$.

c) Berechne die inneren Produkte, $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2$ und $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2$.

d) Finde die Vektoren $\mathbf{f}^*_1$ und $\mathbf{f}^*_2$, die orthonormal zu den Vektoren $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$ (d.h. $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}^*_j = \delta_{ij}$) sind. Das Kronecker-Delta ist definiert, durch

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}.$$

Ankreuzbar: 1a-d, 1ef, 2ab, 2cd, 3ab, 3cd